



مدلسازی عدم تقارن و تغییرساختاری سری‌های زمانی مالی با استفاده از فرآیندهای Markov-switching GARCH

رسول سجادی^۱

امیرحسین فراهانی راد^۲

تاریخ پذیرش: ۹۲/۸/۲۰

تاریخ دریافت: ۹۲/۳/۱۷

چکیده

در طول سالیان گذشته استفاده از فرآیندهای Markov-switching (MS) جهت مدل نمودن دینامیک غیرخطی تلاطم سری‌های زمانی مالی به دلیل انعطاف‌پذیری آن در لحاظ ساختارهای مختلف برای داده‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته است. فرض متداول توزیع بازده، نرمال می‌باشد در حالی که تحقیقات نشان داده است سری‌های زمانی مالی دارای چولگی معناداری نیز می‌باشند که چشم‌پوشی از آن می‌تواند منجر به خطا در پیش‌بینی که مهمترین هدف از بررسی یک سری زمانی است گردد. بنابراین آنچه که انگیزه اصلی این تحقیق را شکل داده است معرفی MS GARCH جهت مدل نمودن تلاطم بازده است به گونه‌ای که مدل بتواند عدم تقارن داده‌های مالی را نیز لحاظ نماید. بدین ترتیب عملکرد مدل‌های متقارن و نامتقارن MS GARCH را بر روی شاخص بورس اوراق بهادار تهران (Tepix) با یکدیگر مقایسه خواهیم نمود. در نهایت با توجه به ارزیابی‌های انجام شده مدل نامتقارن Mix^{icapt} که توانایی تولید چولگی دارد بهترین عملکرد را در بین تمامی مدل‌ها از خود نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: تلاطم، مارکوف سویچینگ، مدل‌های میکسچر، چولگی، گارچ، ارزش در معرض خطر.

۱- دکترای امور مالی-گرایش مدلسازی دانشگاه ESSEX لندن استادیار دانشگاه علم و فرهنگ

۲- کارشناسی ارشد مهندسی مالی دانشگاه علم و فرهنگ ahfrad@gmail.com

۱- مقدمه

حداقل در ۴ دهه اخیر پیدا نمودن روش‌های مناسب جهت مدل کردن سری‌های زمانی مالی، یکی از حوزه‌های تحقیقی بسیار فعال از لحاظ آکادمیک و اخیراً نیز از لحاظ کاربردی آن بوده است. دلیل آن نیز نگرانی عمده موسسات مالی از ریسک‌های بازار و لذا نیاز مبرم آنها به محاسبه دقیق‌تر معیارهای ریسک همچون VaR است تا بتوانند برنامه‌ریزی‌های صحیح‌تری برای مقابله با آن داشته باشند.

جهت ارزیابی ریسک سرمایه، مدیران ریسک می‌بایست بدانند که تلاطم^۱ در برابر یک شوک^۲ یا یک نوسان در بازار در دوره رکود نسبت به دوران رونق اقتصادی چگونه واکنش نشان می‌دهد. البته مخاطبین ما در این جا تنها مدیران ریسک بانک‌ها، شرکت‌های بیمه یا موسسات مالی نخواهند بود بلکه دولت‌ها و سیاست‌گذاران بخش‌های اقتصادی نیز می‌بایست با اطلاع کامل از نحوه رفتار بازار در زمان‌های پرنوسان مانند بحران مالی اخیر بر انبوه مشکلات ناشی از ورشکستگی‌های بانکی (و به دنبال آن شرکت‌های دیگر) فائق آیند.

یکی از روش‌هایی که چارچوب مناسبی را جهت مدل نمودن توزیع بازده روزانه دارایی‌ها فراهم می‌آورد، Markov-switching (MS) GARCH است. (Alexander (2008, p.163) بیان می‌نماید که "این مدل، اطلاعات زیادی از دینامیک تلاطم بازارهای سرمایه در اختیار ما قرار داده و اجازه می‌دهد تا رفتار آن را در بازارها با رژیم‌های مختلف بررسی نماییم."

MS GARCH به دلیل آن که نسبت به مدل‌های تک رژیم GARCH، انعطاف‌پذیری بیشتری دارد در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این مدل با در نظر گرفتن رژیم برای داده‌ها، اجازه تغییر ناگهانی سطح تلاطم را داده که این خود منجر به بهبود معنی دار واریانس پیش‌بینی شده خواهد شد (Ardia, 2009).

اولین بار Hamilton (1989) از مدل Markov-switching در مباحث مالی برای تشریح چرخه تجاری آمریکا که به صورت دوره‌ای، وارد رکود و بعد رشد می‌گشت (و بالعکس) استفاده نمود. سپس Cai (1994) و Hamilton & Susmel (1994) برای اولین بار از آن برای مدل نمودن تلاطم استفاده کردند که در آن سری زمانی شوک‌های $\{\varepsilon_t\}$ به صورت زیر مدل می‌شود:

$$\varepsilon_t = \sigma_{\Delta_t,t} \eta_t \quad (1-1)$$

و واریانس شرطی هر رژیم نیز برابر خواهد بود با

$$\sigma_{jt}^2 = \omega_j + \alpha_j \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_j \sigma_{\Delta_{t-1},t-1}^2$$

$$\omega_j > 0 \quad \alpha_j, \beta_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (2-1)$$

آن‌ها مدل خود را بر روی واریانس رژیم قبلی ($\sigma_{\Delta_{t-1,t-1}}^2$) شرطی کردند و مشاهده نمودند که برآورد حداکثر درست‌نمایی مدل به دلیل وابستگی مسیرها (مسیر تغییر رژیم‌ها) در رابطه (۱) - 2) نشدنی است و لذا به جای MS GARCH از MS ARCH استفاده نمودند. برای توضیح بیشتر این مشکل فرض کنید که قصد داریم تابع درست‌نمایی مدل بالا را محاسبه نماییم. آنگاه با این مساله مواجه خواهیم شد که Δ_{t-1} و در نتیجه $\sigma_{\Delta_{t-1,t-1}}^2$ در (۱-2) غیرقابل مشاهده هستند و بنابراین می‌بایست تمام مسیرها را مدنظر قرار دهیم. بدین صورت برای محاسبه واریانس در زمان t نیاز به کل اطلاعات تا زمان t است و این بدان معناست که برای برآورد درست‌نمایی به ازای T مشاهده نیاز به محاسبه k^T مسیر ممکن خواهد بود که پیاده سازی چنین محاسبه ای غیرعملی است. برای حل این مشکل (Gray (1996)، $\sigma_{\Delta_{t-1,t-1}}^2$ را با واریانس شرطی ε_{t-1} جابه‌جا نمود که این واریانس از رابطه زیر قابل محاسبه می‌بود:

$$\text{Var}(\varepsilon_{t-1}) = \sum_{j=1}^k \text{Pr}(\Delta_{t-1} = j) \sigma_{j,t-1}^2 \quad (3-1)$$

اما رویکرد سوم در زمینه مدل‌های MS GARCH را Haas et al (2004) مطرح نمودند که در واقع به عنوان حالت تعمیم یافته ای از مدل تک رژیمی GARCH می‌توان به آن نگریست. در این مدل، واریانس شرطی هر رژیم تنها به وقفه یا lag خود وابسته است:

$$\sigma_{jt}^2 = \omega_j + \alpha_j \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_j \sigma_{j,t-1}^2 \quad \omega_j > 0 \quad \alpha_j, \beta_j \geq 0 \quad (4-1)$$

در تمامی مدل‌های بالا فرض بر نرمال بودن سری زمانی است چرا که براساس قضیه حد مرکزی (Osborn, 1959)، فرض کلاسیک و کلی در مورد توزیع سری‌های زمانی بازده (r_t)، نرمال بودن آن‌ها است. درحالی‌که تحقیقات نشان داده‌اند که توزیع بازده دارای چولگی معناداری می‌باشد (مثلاً (Grigoletto & Lisi, 2009)) که چشم پوشی از آن‌ها در محاسبات تاثیرگذار خواهد بود و می‌تواند منجر به پیش بینی‌ها و نتیجه‌گیری‌های نادرست از داده‌ها گردد. بنابراین آن‌چه که انگیزه انجام این تحقیق را شکل می‌دهد وجود ریسک چولگی در مدل‌های مالی است. ریسک چولگی زمانی رخ خواهد داد که برخلاف توزیع متقارن مفروض برای یک مدل، میانگین و میانه داده‌ها با یکدیگر برابر نباشند.

Timmermann (2000) روشی را برای تولید چولگی در مدل‌های مالی بیان نمود و آن استفاده از میانگین رژیم‌ها در دینامیک سری زمانی به صورت زیر است:

$$\varepsilon_t = \mu_{\Delta_t} + \sigma_{\Delta_t,t} \eta_t \quad (5-1)$$

بنابراین سوالی که در این تحقیق به دنبال پاسخ به آن هستیم این است که آیا مدل MS-GARCH با اضافه نمودن میانگین رژیم به دینامیک سری زمانی آن قادر خواهد بود که ضعف مدل-های نرمال را در توضیح چولگی بازده برطرف سازد؟

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

با توجه به مطالب فوق، جهت تعریف مدل Markov-switching GARCH در ابتدا فرض می‌کنیم که سری زمانی $\{\varepsilon_t\}$ بدین شکل تولید می‌گردد:

$$\varepsilon_t = \mu_{\Delta_t} + \sigma_{\Delta_t,t} \eta_t \quad (1-2)$$

در رابطه بالا اجزای اخلال $\{\eta_t\}$ ، iid بوده و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک خواهد بود. $\{\Delta_t\}$ نیز یک زنجیره مارکوف با فضای حالات محدود $S = \{1, 2, \dots, k\}$ و ماتریس انتقال تجزیه‌ناپذیر و نامتناوب زیر می‌باشد:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{k1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ p_{1k} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

که در این ماتریس، p_{ij} احتمال انتقال از رژیم i به j را نشان می‌دهد.

$$p_{ij} = \Pr(\Delta_t = j | \Delta_{t-1} = i) \quad i, j = 1, 2, \dots, k \quad (3-2)$$

و توزیع ایستایی زنجیره مارکوف نیز به صورت $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ نمایش داده می‌شود. زنجیره مارکوف $\{\Delta_t\}$ و اجزای اخلال $\{\eta_t\}$ همواره از یکدیگر مستقل می‌باشند. انحراف استاندارد شرطی رژیم j (σ_{jt}) نیز از معادله GARCH زیر محاسبه خواهد شد:

$$\sigma_{jt} = \omega_j + \alpha_j (|\varepsilon_{t-1}| - \lambda \varepsilon_{t-1}) + \beta_j \sigma_{j,t-1} \quad (4-2)$$

s. t: $\omega_j > 0$ $\alpha_j, \beta_j \geq 0$ $j = 1, 2$ $-1 \leq \lambda \leq 1$

مدل های کلاسیک GARCH به دلیل وجود اثر اهرمی^۱، در توضیح صحیح دم توزیع بازده با مشکل روبرو هستند (Sajjad et al, 2008). اثر اهرمی از مشخصه های اصلی توزیع بازده سهام است و بدان معناست که شوک های (ε_t) مثبت و منفی با مقادیر عددی یکسان، اثرات نوسانی متفاوتی خواهند داشت. پارامتر λ نیز همین اثرات را اعمال می‌کند، اگر $\lambda > 0$ باشد شوک های منفی در دوره بعدی نسبت به شوک های مثبت، تلاطم بالاتری ایجاد می‌کنند و اگر $\lambda < 0$ باشد بالعکس.

علت استفاده از انحراف استاندارد شرطی به جای واریانس شرطی در مدل GARCH بالا، نتایج تحقیقات انجام شده بر روی مدل AP GARCH (Ding et al (1993)) است که پارامتر d را به عنوان توان به معادله GARCH اضافه نمود:

$$\sigma_t^d = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \lambda_i \varepsilon_{t-i})^d + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^d \quad d > 0 \quad (5-2)$$

Brooks et al (2000) با برازش مدل AP GARCH^{۱۰} بر روی ۱۰ شاخص سهام مختلف نشان دادند که پارامتر d تنها برای یکی از سری‌های زمانی به طور معناداری متفاوت از یک است در حالی که برای ۹ تای آن‌ها، d به صورت معناداری متفاوت از ۲ خواهد بود. Giot & Laurent (2003) نیز با به کار بردن مدل AP GARCH برای سه سهم و نیز سه شاخص سهام مختلف دریافتند که d تنها برای یکی از سهام‌ها به طور معنادار متفاوت از مقدار واحد (یک) بدست آمده است و نتیجه گرفتند که "به جای مدل کردن واریانس شرطی بهتر است از انحراف معیار شرطی استفاده نماییم." مشابه همین نتایج نیز در تحقیقات اخیر Nieto & Ruiz (2008) و Lejeune (2009) بدست آمده است.

استفاده از Markov-switching در مدل نمودن تلاطم نسبت به مدل‌های تک رژیمی GARCH چندین برتری دارد:

- ۱) مهمترین ویژگی مدل‌های MS این است که با در نظر گرفتن رژیم برای داده‌ها امکان لحاظ رفتارهای مختلف برای GARCH در هر رژیم فراهم کرده و تصویر روشن و واضحی از دینامیک واریانس هر رژیم پیش روی ما قرار خواهد داد.
- ۲) این مدل‌ها، چگالی پیش بینی شده دقیق‌تری را به ما می‌دهند.
- ۳) مدل‌های MS GARCH برخلاف مدل‌های تک رژیمی، نیازی به تعیین یک توزیع دم-سنگین برای اجزای اخلاص (η_t) ندارند و این بدلیل وجود منبع کشیدگی در مدل‌های Regime-switching یعنی اثرات mixture است (Haas, 2010). بدین ترتیب توزیع نرمال هم در این مدل‌ها می‌تواند کشیدگی را توضیح دهد که این امر به راحتی محاسبات کمک خواهد نمود.

یک دسته از مدل‌های MS GARCH، فرآیندهای Mixture GARCH می‌باشند که توسط Haas (2004) بیان شده است. در این مدل‌ها فرض می‌گردد که ماتریس انتقال دارای مرتبه واحد می‌باشد. این فرآیندها را برای، هر دو حالت با میانگین مولفه‌های^۱ صفر و هم غیر صفر در نظر خواهیم گرفت. منظور از میانگین مولفه‌های همان میانگین رژیم می‌باشد. این دسته مدل‌ها را در ادامه به اختصار با Mix نشان می‌دهیم. در ضمن، جهت تمییز دادن مدل‌های متقارن (Mix) از مدل‌های

نامتقارن خود، آن‌ها را با زیرنویس s و به صورت Mix_s مشخص خواهیم نمود. مدل‌هایی که ماتریس انتقال غیر واحد دارند را نیز با Markov نشان خواهیم داد.

شکل خاص دیگر مدل‌های MS GARCH، حالتی است که در آن تنها عرض از مبدا رابطه GARCH یعنی ω تغییر می‌کند و بقیه پارامترهای GARCH بین دو رژیم برابر می‌ماند. این دسته مدل‌ها را با بالانویس $cept$ در مدل‌ها مشخص نموده‌ایم به عنوان مثال mix_s^{cept} بیانگر مدل Mix GARCH با $\mu_1 = \mu_2 = 0$ و محدودیت‌های $\omega_1 \neq \omega_2, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$ است. در جدول ۱، مدل‌های MS GARCH به همراه پارامترهای خود به طور خلاصه نمایش داده شده‌اند.

جدول ۱: مشخصات مدل‌های Markov-switching GARCH

مدل‌ها	زنجیره مارکوف	محدودیت‌ها GARCH	چگالی شرطی
Markov	-	-	$\mu_1 = \mu_2 = 0$
Markov ^{cept}	-	$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$	$\mu_1 = \mu_2 = 0$
Mix _s	$p_{11} = 1 - p_{22}$	-	$\mu_1 = \mu_2 = 0$
Mix	$p_{11} = 1 - p_{22}$	$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$	$\mu_1 = \mu_2 = 0$
Mix ^{cept}	$p_{11} = 1 - p_{22}$	$\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$	$\pi_1 \mu_1 + \pi_2 \mu_2 = 0$

جهت مقایسه مدل‌های چند رژیمی با مدل‌های متداول تک رژیمی نیز مدل $GARCH(1,1)$ را به تحقیق خود افزوده‌ایم.

نکته بعدی در ارتباط با انتخاب تعداد رژیم می‌باشد چرا که یکی از مقولاتی که در مسایل Regime-switching همچنان حل نشده باقی مانده است، مشخص نمودن تعداد رژیم‌ها یا به عبارتی انتخاب k است. معمولاً در داده‌های مالی جهت کاهش محاسبات، $k=2$ در نظر می‌گیرند. به ویژه این که در مدل‌ها با $k > 2$ ، پارامترهای حداقل یکی از رژیم‌ها با خطای برآورد خیلی بزرگ، تخمین زده می‌شود (Alexander & Lazar, 2006) با توجه به دلایل مذکور، در اینجا نیز مدل‌های MS را با $k=2$ در نظر خواهیم گرفت.

توزیع ایستایی زنجیره مارکوف نیز برابر خواهد بود با:

$$\pi_1 = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}} (6-2)$$

$$\pi_2 = 1 - \pi_1 (7-2)$$

اعمال نماییم: MS صفر شود می‌بایست محدودیت زیر را نیز در مدل ε_t و برای اینکه میانگین

$$\pi_1 \mu_1 + \pi_2 \mu_2 = 0 \quad (8-2)$$

نکته دیگر این است که در تمامی مدل‌ها، سری زمانی بازده به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$r_t = \mu + \varepsilon_t \quad (9-2)$$

// میانگین ثابت بوده و ε_t نیز توسط یکی از مدل‌های این تحقیقتوضیح داده می‌شود.

۳- روش شناسی پژوهش

این تحقیق یک تحقیق بنیادی است و از لحاظ روش جمع‌آوری داده‌ها نیز از نوع پیمایشی و به روش مقطعی می‌باشد.

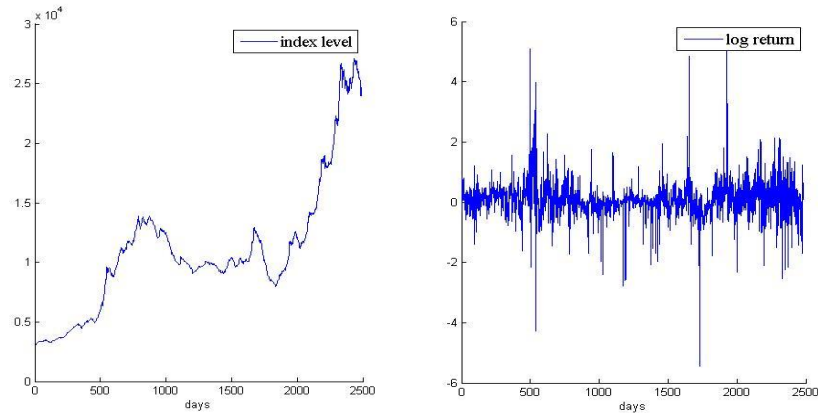
این تحقیق بر روی شاخص کل قیمت بورس اوراق بهادار تهران (Tepix) بین سال‌های ۱۳۸۰ تا ۱۳۹۰ انجام می‌گیرد و مجموعاً ۲۴۸۰ مشاهده را دربرخواهد گرفت. شاخص Tepix نشانگر روند تغییرات قیمت کل شرکت‌های پذیرفته شده در بورس تهران است.

برای رسیدن به یک سری زمانی مانا به جای استفاده از سطح شاخص از بازده آن استفاده می‌نماییم:

$$r_t = 100 \times \log \left(\frac{I_t}{I_{t-1}} \right) \quad (1-3)$$

I_t سطح شاخص را در زمان t نشان می‌دهد و \log بازده به درصد است.

مانایی یا نامانایی دو سری زمانی را می‌توان به وضوح در شکل ۱ مشاهده نمود. شکل سمت چپ، نمودار شاخص کل قیمت‌ها است و همانگونه که مشخص می‌باشد، میانگین و واریانس آن در طول زمان در حال تغییر است اما شکل سمت راست که نمودار بازده قرار دارد یک سری زمانی مانا را نشان می‌دهد.



شکل ۱: نمودار شاخص Tepix (سمت چپ) و بازده آن (سمت راست) بین سال‌های ۱۳۸۰ تا ۱۳۹۰

در جدول ۲ گشتاورهای مختلف کل داده‌ها قرار داده شده است. همان گونه که مشخص است میانگین بازده شاخص Tepix نزدیک به صفر بوده و توزیع آن نیز دارای چولگی و کشیدگی معنادار می‌باشد. p-value آزمون Jarque-Bera تقریباً برابر صفر است و بنابراین فرض صفر آزمون (H_0): توزیع داده‌ها، نرمال است) رد می‌گردد.

جدول ۲: گشتاورهای مختلف سری زمانی بازده

گشتاورها	
میانگین	۰.۰۸۲
انحراف استاندارد	۰.۵۹۱
چولگی	۰.۳۲۳ (0.00)
کشیدگی	۱۶.۱۰ (0.00)
Jarque-Bera	17783.5 (0.00)

عداد داخل پرانتز مقادیر p-value می‌باشند

۴- مدل پژوهش و نحوه آزمون آن

در ابتدا با استفاده از ۱۲۴۰ مشاهده اول، پارامترهای هر مدل را تخمین زده و سپس آن‌ها را به ازای ۱۲۴۰ مشاهده آخر برای هر ماه (۲۰ روز کاری)، به روز می‌نماییم یعنی داده‌های ۱ تا ۱۲۴۰ را در نظر گرفته، تابع log درستنمایی نمونه را محاسبه و به روش حداکثر درستنمایی

پارامترها را برآورد می‌نماییم، سپس با استفاده از این نتایج برای روزهای ۱۲۴۱ تا ۱۲۶۰ پیش‌بینی می‌کنیم. در مرحله بعدی داده‌های ۲۱ تا ۱۲۶۰ را در نظر گرفته و به ازای روزهای ۱۲۶۱ تا ۱۲۸۰ پیش‌بینی کرده و این عمل را تا انتها تکرار می‌نماییم. در نهایت بدین ترتیب ۱۲۴۰ چگالی پیش‌بینی شده و در نتیجه ۱۲۴۰ روز انحراف معیار پیش‌بینی شده خواهیم داشت. اصطلاحاً در ادبیات به مشاهداتی که برپایه آن‌ها، پارامترها را تخمین می‌زنیم پیش‌نمونه و به پیش‌بینی‌ها (روزهایی که به ازای آن‌ها پیش‌بینی انجام می‌دهیم)، نتایج خارج از نمونه^۱ می‌گویند.

۴-۱- محاسبه تابع درست‌نمایی و برآورد پارامترها

در زمان t ، بردار تصادفی $Z_t = (Z_{1t}, Z_{2t}, \dots, Z_{kt})'$ را در نظر بگیرید که هر مولفه آن به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$Z_{jt} = \begin{cases} 1 & \Delta_t = j \\ 0 & \Delta_t \neq j \end{cases} = \{1, 2, \dots, k\} \quad (2-3)$$

و فرض کنید $\varepsilon_t = \{\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \dots\}$ فرآیند مارکوف تا زمان t ، $\Pr(Z_{jt}=1 | \varepsilon_t)$ نیز احتمال بودن در رژیم j در لحظه t براساس فرآیند تا زمان t و $Z_t | t = (Z_{1t} | t, \dots, Z_{kt} | t)$ باشد.

$$Z_{t|t} = \frac{Z_{t|t-1} \odot f_t}{I_k(Z_{t|t-1} \odot f_t)} \quad (3-3)$$

$$Z_{t+1|t} = P Z_{t|t} \quad (4-3)$$

P ماتریس انتقال، I_k ماتریس سطری k بعدی با درایه‌های یک، \odot ضرب عنصر به عنصر یا ضرب Hadamard است و تابع چگالی نیز به فرم ماتریسی زیر می‌باشد:

$$f_t = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_t | Z_{1t} = 1, \varepsilon_{t-1}; \Omega) \\ \vdots \\ f(\varepsilon_t | Z_{kt} = 1, \varepsilon_{t-1}; \Omega) \end{pmatrix} \quad (5-3)$$

$f(\varepsilon_t | Z_{jt} = 1, \varepsilon_{t-1}; \Omega)$ تابع چگالی شرطی بازده، براساس اطلاعات تا زمان $(\varepsilon_{t-1})_{t-1}$ می‌باشد و هنگامی که فرآیند در رژیم j است $Z_{jt} = 1$ خواهد بود. بردار Ω نیز شامل میانگین و واریانس شرطی و پارامترهای توزیع شرطی است. برای مقداردهی اولیه به روابط بازگشتی (۳-۳) و (۴-۳)، از توزیع ایستایی زنجیره مارکوف استفاده می‌گردد. پرواضح است که انتخاب این مقادیر اولیه، بر روی نتایج حاصل از پیش‌بینی‌های سری‌های بزرگ مانند سری‌های زمانی مالی، ناچیز خواهد بود. چگالی پیش‌بینی شرطی ε_{t+1} نیز براساس فرآیند تا زمان t ، از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$f(\varepsilon_{t+1} | \underline{\varepsilon}_t) = \sum_{j=1}^k z_{j,t+1} |_{t} f(\varepsilon_{t+1} | z_{jt} = 1, \underline{\varepsilon}_t; \Omega)$$

$$= l'_k(z_{t+1} |_{t} \odot f_{t+1}) \quad (6-3)$$

و در نهایت تابع \log در استنمایی² (LLF) برای اندازه نمونه T ، برابر خواهد بود با

$$\log L = \sum_{t=1}^T \log f(\varepsilon_t | \underline{\varepsilon}_{t-1}) = \sum_{t=1}^T \log [l'_k(z_t |_{t-1} \odot f_t)] \quad (7-3)$$

نکته مهمی که می‌باید به آن اشاره نمود این است که اگر مرتبه ماتریس انتقال، واحد باشد دیگر نیازی به محاسبات بازگشتی (۳-۳) و (۴-۳) برای تعیین اوزان توابع نمی‌باشد چرا که این اوزان برابر توزیع ایستای زنجیره مارکوف خواهند بود.

۲-۴- محاسبه ارزش در معرض خطر

ارزش در معرض خطر^۱ (VaR) معیاری است جهت اندازه گیری ریسک بازار. ریسک بازار، ریسک ناشی از تغییر قیمت یک دارایی در اثر شرایط بازار همچون تغییر نرخ بهره، تغییر نرخ تبادل ارز و ... است که با متنوع سازی نیز قابل حذف شدن نمی‌باشد و تنها با استفاده از پوشش ریسک می‌توان از شدت آن کاست. به طور کلی VaR، حداکثر ضرر یک موضع معاملاتی یا پرتفولیو را در یک سطح اطمینان معین و در افق زمانی مشخص، نشان می‌دهد. فرض کنید در زمان t ، بردار $\sigma_{t+1} = [\sigma_{1,t+1}, \sigma_{2,t+1}, \dots, \sigma_{k,t+1}]$ را پیش بینی کرده ایم و حال قصد داریم ارزش در معرض خطر بازده را محاسبه نماییم.

با توجه به رابطه (۳-۶)، تابع چگالی شرطی بازده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(r_{t+1} | \underline{r}_t) = \sum_{j=1}^k z_{j,t+1} f(r_t | z_{jt} = 1, \underline{r}_t; \Omega) \quad (8-3)$$

و بنابراین تابع توزیع تجمعی (cdf)، براساس اطلاعات تا زمان t برابر است با:

$$F(r_{t+1} | \underline{r}_t) = \sum_{j=1}^k z_{j,t+1} F(r_t | z_{jt} = 1, \underline{r}_t; \Omega) \quad (9-3)$$

در نهایت VaR مدل Markov-switching در سطح α از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$F(\text{VaR}_{t+1}(\alpha)) = \sum_{j=1}^k z_{j,t+1} F(\text{VaR}_{t+1}(\alpha) | z_{jt} = 1, \underline{r}_t; \Omega) - \alpha = 0 \quad (10-3)$$

از آن جایی که عبارت بالا یک عبارت بسته² نمی‌باشد، می‌بایست VaR را با عدد داندن تخمین زد. لازم به یادآوری است که در بالا، $z_{j,t+1}$ از روابط (۳-۳) و (۴-۳)، و در صورتی که مدل mixture باشد از روابط (۶-۲) و (۷-۲) محاسبه می‌گردد.

ارزش در معرض خطر مدل تک رژیمی GARCH نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{VaR}_{t+1}(\alpha) = \mu + \sigma_{t+1} \Phi^{-1}(\alpha) \quad (11-3)$$

Φ^{-1} تابع معکوس نرمال استاندارد و μ میانگین بازده در رابطه (۹-۲) می‌باشد.

۳-۴- ارزیابی عملکرد نتایج خارج از نمونه مدل‌ها

در مرحله آخر جهت آزمایش درستی برآوردهای مدل‌ها، مقادیر پیش‌بینی شده توسط هر کدام از آن‌ها را با مقادیر واقعی مشاهده شده مقایسه می‌نماییم که این عمل را اصطلاحاً آزمون برگشت^۱ می‌نامند.

به طور معمول جهت انجام آزمون برگشت از آزمون نسبت درست‌نمایی^۲ یا کوپیک (Kupiec, 1995) استفاده می‌شود. البته در این زمینه، آزمون‌های دیگری نیز وجود دارند اما تست کوپیک ما را به هدفمان که بررسی توانایی مدل MS GARCH در لحاظ چولگی توزیع بازده است خواهد رساند. این آزمون را هم در موضع فروش برای تمامی مدل‌ها به ازای چهار سطح مختلف $\text{VaR}\alpha = \{0.995, 0.99, 0.975, 0.95\}$ و هم در موضع خرید به ازای سطوح $\text{VaR}\alpha = \{0.005, 0.01, 0.025, 0.05\}$ انجام می‌دهیم.

آزمون کوپیک در موضع فروش بدین شکل انجام می‌گردد که ابتدا تعداد کل خطای پیش-بینی (x) مدل را محاسبه می‌نماییم:

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1 & r_{t+1} > \text{VaR}_{t+1}(\alpha) \\ 0 & r_{t+1} \leq \text{VaR}_{t+1}(\alpha) \end{cases} \quad (12-3)$$

$$x = \sum_{t=0}^{N-1} I_{t+1} \quad (13-3)$$

که در رابطه بالا $\text{VaR}_{t+1}(\alpha)$ ارزش در معرض خطر در سطح اطمینان α در زمان $t+1$ بر اساس اطلاعات موجود تا زمان t (Ψ_t) می‌باشد:

$$\hat{F}(\text{VaR}_{t+1}(\alpha) | \Psi_t) = \alpha \quad (14-3)$$

حال، نسبت خطاهای رخ داده^۱ به ازای اندازه نمونه N ($N = 1240$) قابل محاسبه خواهد بود:

$$\hat{\alpha} = \frac{x}{N} \quad (15-3)$$

فرض صفر این است که نسبت خطاهای پیش‌بینی رخ داده ($\hat{\alpha}$) با مقدار مورد نظر ما یعنی α تفاوت معنی‌داری ندارد (H_0 : دلیلی بر رد مدل وجود ندارد). جهت آزمون فرض صفر نیز از آماره زیر استفاده می‌نماییم:

$$LR(\alpha) = -2 \left(x \log \left(\frac{\alpha}{\hat{\alpha}} \right) + (N - x) \log \left[\frac{(1 - \alpha)}{(1 - \hat{\alpha})} \right] \right) \sim \chi^2_{(1)} \quad (16-3)$$

آزمون کوپیک برای موضع خرید نیز مشابه با بالا انجام می‌گردد با این تفاوت که خطا زمانی رخ می‌دهد که $r_{t+1} < VaR_{t+1}(\alpha)$. در نهایت نیز جهت مقایسه کارایی مدل‌ها از معیار متوسط قدرمطلق درصد خطا^۱ (MAPE) استفاده خواهیم نمود:

$$MAPE = 1/8 \left(\sum_{i=1}^4 \left| \frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\alpha_i} \right|_{\text{short}} + \sum_{i=1}^4 \left| \frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\alpha_i} \right|_{\text{long}} \right) \quad (17-3)$$

این معیار میانگین مجموع فواصل هر مدل را از مقادیر هدف اندازه‌گیری می‌نماید. مقدار هدف، تعداد خطایی است که ما در مدل VaR خود با توجه به سطح مورد نظر می‌پذیریم که برابر است با $N(1-\alpha)$. به عنوان نمونه مقدار هدف برای 95% VaR برابر خواهد بود با ۶۲. این بدان معناست که مدلی برای ما ایده‌آل‌تر است که تعداد خطای آن به ۶۲ نزدیک‌تر باشد و هر چه تعداد خطای پیش‌بینی مدل از این مقدار کمتر یا بیشتر گردد عملکرد مدل ضعیف‌تر خواهد بود.

۴- نتایج پژوهش

کلیه نتایج در جداول ۳ و ۴ خلاصه شده‌اند. با توجه به مقادیر p-value حاصل از آزمون کوپیک که در جدول ۳ مشاهده می‌نماییم مدل‌های MS GARCH نسبت به مدل تک رژیم GARCH وضعیت بهتری دارند چرا که مقدار p-value دو سطح مختلف VaR مدل تک رژیم تقریباً برابر با صفر بدست آمده است که ضعف این مدل را در پیش‌بینی صحیح مقادیر تلاطم بازده می‌رساند. عملکرد بهتر مدل‌های MSGARCH نسبت به مدل متداول تک رژیم GARCH(1,1) به توانایی این دسته فرآیندها در لحاظ کشیدگی سری‌های زمانی مالی بدون نیاز به استفاده از توزیع‌های کشیده برخوردار گشت و این در حالی است که مدل تک رژیم GARCH تنها زمانی می‌تواند کشیدگی تولید کنند که تابع چگالی آن‌ها کشیده باشد.

براساس معیار MAPE نیز که میانگین خطای پیش‌بینی را نشان داده و بنابراین امکان مقایسه مدل‌ها را فراهم می‌نماید، مدل نامتقارن Mix^{icpt} بهترین عملکرد را در بین تمامی مدل‌ها دارد که

دلیل این مساله نیز آن است که این مدل علاوه بر منبع تولید کشیدگی، منبع تولید چولگی نیز دارد (این منبع همان میانگین رژیم در دینامیک مدل است) و لذا همزمان می‌تواند هم کشیدگی و هم چولگی سری زمانی را لحاظ نماید.

جدول ۳: مقادیر p-value آزمون کوپیک به ازای سطوح مختلف VaR

VaR level	short position				long position			
	99.5%	99%	97.5%	95%	0.5%	1%	2.5%	5%
Markov	0.935	0.093	0.856	0.033	0.291	0.655	0.219	0.307
Markov ^{iccept}	0.935	0.179	0.476	0.024	0.291	0.473	0.289	0.441
Mix _s	0.752	0.093	0.591	0.013	0.291	0.325	0.117	0.163
	0.935	0.308	0.476	0.013	0.291	0.473	0.219	0.203
Mix	0.752	0.179	0.039	0.001	0.291	0.478	0.289	0.370
Mix ^{iccept}	0.752	0.478	0.117	0.003	0.488	0.909	0.476	0.520
GARCH (1,1)	0.082	0.214	1.000	0.509	0.000	0.000	0.289	0.020

جدول 4: تعداد خطاهای پیش‌بینی هر کدام از مدل‌ها در سطوح مختلف VaR

VaR level	short position				long position				MAP E
	99.5 %	99%	97.5%	95%	0.5 %	1%	2.5 %	5%	
target	6.2	12.4	31	62	6.2	12.4	31	62	
Markov	6	7	32	79	9	14	38	70	0.214
Markoviccept	6	8	35	80	9	15	37	68	0.220
Mix _s	7	7	34	82	9	16	40	73	0.274
	M	6	9	35	82	9	15	38	72
Mix	7	8	43	90	9	10	37	69	0.284
Mixiccept	7	10	40	86	8	12	35	67	0.192
GARCH	11	17	31	57	23	29	37	45	0.718

هدف (target)، تعداد خطایی است که در مدل VaR قصد داریم بپذیریم و برابر است با $N(1-\alpha)$ که $N=1240$ تعداد روزهایی است که پیش‌بینی کرده‌ایم و α نیز سطح اطمینان مدل VaR می‌باشد. هر چه تعداد خطاهای پیش‌بینی یک مدل به مقدار هدف نزدیک‌تر باشد، MAPE آن کمتر شده و عملکرد مدل بهتر خواهد شد اما هر چه تعداد خطاهای مدل از مقدار هدف کمتر یا بیشتر گردد، MAPE آن بیشتر شده و عملکرد مدل ضعیف‌تر خواهد شد.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

همان‌طور که می‌دانیم یکی از مهمترین روش‌های محاسبه تلاطم، به‌کارگیری مدل‌های خانواده GARCH است که ما این مدل‌ها را با استفاده از روش‌های regime-switching به گونه‌ای بسط دادیم که قادر باشند چولگی سری‌های زمانی مالی را لحاظ نمایند. سپس تلاطم‌های حاصل از مدل‌ها را در پیش‌بینی معیار VaR برای موقعیت‌های خرید و فروش به کار بردیم.

نتایج آزمون‌های انجام شده نشان می‌دهد که مدل Mix^{iccept} بهترین عملکرد را در بین تمامی مدل‌ها دارد و بنابراین پاسخ سوالی که انگیزه انجام این تحقیق را شکل داد، بلی است و اضافه نمودن میانگین رژیم به دینامیک سری زمانی مالیدر مدل MS GARCH، آنرا قادر خواهد ساخت تا ضعف توزیع‌نرمال را در توضیح چولگی بازده برطرف سازد.

مدل‌های MS GARCH به دلیل برتری‌هایی که نسبت به مدل‌های تک‌رژیمی دارا می‌باشند همچون انعطاف‌پذیری بالا، امکان لحاظ رفتارهای مختلف برای GARCH در هر رژیم، چگالی پیش‌بینی دقیق‌تر و عدم نیاز به توزیع‌های دم‌سنگین جهت تولید کشیدگی، هم از لحاظ آکادمیک و هم از جنبه عملی، کاربرد خواهد داشت.

از جنبه عملی و کاربردی، نتایج حاصل از این تحقیق را می‌توان در بخش مدیریت ریسک بانک‌ها، شرکت‌های بیمه، موسسات مالی و سرمایه‌گذاری جهت محاسبه معیارهای مختلف ریسک همچون ارزش در معرض خطر و نیز بررسی دینامیک بازار سرمایه به کار گرفت. از جنبه آکادمیک نیز برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شود از مدل Mix^{iccept} جهت تعیین قیمت منصفانه ابزارهای مشتقه استفاده گردد. به طور مثال همان‌طور که می‌دانیم در محاسبه قیمت اختیار معامله با استفاده از فرمول بلک-شولز نیاز به ۵ پارامتر مختلف داریم که از بین آن‌ها واریانس از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است چرا که تنها پارامتری است که غیرقابل مشاهده می‌باشد. قیمت معامله، قیمت جاری سهم، زمان باقیمانده تا سررسید و نرخ بهره، همگی به آسانی و از طریق بازار قابل تعیین هستند و تنها واریانس است که می‌بایست پیش‌بینی گردد. همین‌طور می‌توان از مدل مذکور جهت محاسبه نسبت پوشش ریسک قراردادهای آتی استفاده نمود.

فهرست منابع

- * Alexander, C. (2008): Practical Financial Econometrics. Chichester: John Wiley & Sons.
- * Ardia, D. (2009): "Bayesian Estimation of a Markov-Switching Threshold Asymmetric GARCH Model with Student-t Innovations," *Econometrics Journal*, 12, 105-126.

- * Brooks, R. D., Faff, R. W., McKenzie, M. D., and Mitchell, H. (2000): "A Multi-Country Study of Power ARCH Models and National Stock Market Returns," *Journal of International Money and Finance*, 19, 377–397.
- * Cai, J. (1994): "A Markov Model of Switching-Regime ARCH," *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 309–316.
- * Ding, Z., Granger, C. W. J., and Engle, R. F. (1993): "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model," *Journal of Empirical Finance*, 1, 83–106.
- * Giot, P. and Laurent, S. (2003): "Value-at-Risk for Long and Short Trading Positions," *Journal of Applied Econometrics*, 18, 641–664.
- * Gray, S. F. (1996): "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime-Switching Process," *Journal of Financial Economics*, 42, 27–62.
- * Grigoletto, M. and Lisi, F. (2009): "Looking for Skewness in Financial Time Series," *Econometrics Journal*, 12, 310–323.
- * Haas, M. (2010): "Skew-Normal Mixture and Markov-Switching GARCH Processes," *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 14.
- * Haas, M., Mittnik, S., and Paolella, M. S. (2004): "A New Approach to Markov-Switching GARCH Models," *Journal of Financial Econometrics*, 2, 493–530.
- * Hamilton, J. D. (1989): "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, 57, 357–384.
- * Hamilton, J. D. and Susmel, R. (1994): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime," *Journal of Econometrics*, 64, 307–333.
- * Lejeune, B. (2009): "A Diagnostic M-Test for Distributional Specification of Parametric Conditional Heteroscedasticity Models for Financial Data," *Journal of Empirical Finance*, 16, 507–523.
- * Nieto, M. R. and Ruiz, E. (2008): "Measuring Financial Risk: Comparison of Alternative Procedures to Estimate VaR and ES," *Statistics and Econometrics Working Paper 08-73*, Department of Economics, Universidad Carlos III de Madrid.
- * Osborne, M. F. M. (1959): "Brownian Motion in the Stock Market," *Operations Research*, 7, 145–173.
- * Sajjad, R., Coakley, J., and Nankervis, J. C. (2008): "Markov-Switching GARCH Modelling of Value-at-Risk," *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, 12, Article 7.
- * Timmermann, A. (2000): "Moments of Markov Switching Models. *Journal of Econometrics*, 96, 75–111