



تخمین پارامترهای مدل قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان

عبدالساده نیسی^۱

بهروز ملکی^۲

روزبه رضائیان^۳

تاریخ پذیرش: ۹۵/۲/۱۶

تاریخ دریافت: ۹۴/۱۲/۳

چکیده

برآورد ارزش اختیار در مدل‌های تلاطم تصادفی یکی از مهم‌ترین جستارها در علوم مالی می‌باشد که در چند دهه اخیر پیرامون آن پژوهش‌های فراوانی انجام گرفته‌است. اما در بسیاری از این پژوهش‌ها پارامترهای مدل، بدون واسنجی^۱ و یا بدون هیچ اشاره‌ای به نحوه انجام آن، در محاسبه قیمت اختیار معامله‌ها بکار رفته‌اند. در این مقاله ضمن معرفی و بررسی مدل‌های هستون کلاسیک و هستون مضاعف^۲ می‌خواهیم با کمک رهیافت تابع زیان^۳ پارامترهای این دو مدل را تخمین بزنیم. به همین منظور از قیمت‌های اختیار فروش اروپایی سهام شرکت مایکروسافت^۴ با سررسیدهای یکسان و قیمت‌های توافقی متفاوت بهره‌گرفته‌ایم و با نمایش اثر تبسم^۵ تلاطم ضمنی^۶ قیمت اختیار فروش این شرکت در آوریل ۲۰۱۵ توانسته‌ایم نشان دهیم که مدل هستون مضاعف در سررسیدهای کوتاه‌مدت کارکرد بهتری نسبت به مدل هستون کلاسیک دارد.

واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی اختیارها، اثر تبسم تلاطم ضمنی، مدل‌های هستون کلاسیک و هستون مضاعف، روش انتگرال‌گیری گاوس-لاگر، تخمین پارامتر با کمک تابع زیان.

۱- دانشیار گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبایی a_neisy@atu.ac.ir

۲- کارشناس ارشد ریاضی کاربردی، گرایش مالی، دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبایی behrouz.maleki@yahoo.com

۳- کارشناس ارشد ریاضی کاربردی، گرایش مالی، دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبایی roozbe@mail.com

۱- مقدمه

در سال ۱۹۷۳ فیشر بلک و مایرون شولز (Black and Scholes, 1973) برای حل مسأله‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی، راهبرد نوینی را پیشنهاد کردند که مبتنی بر تشکیل سبدی خودتامین^۷ در یک فضای بدون آربیتراژ^۸ بود. آن‌ها نشان دادند که اگر فردی در یک بازار کامل به جای خرید یک اختیار، با پولی یکسان سهام و ورقه قرضه بخرد می‌تواند در سررسید، سودی مشابه با اعمال این اختیار را کسب کند. برای انجام این کار آن‌ها قیمت سهام را با کمک یک فرایند وینر هندسی^۹ مدل‌سازی کردند و با پوشش کامل سبد و حذف عامل‌های نوسان‌پذیر توانستند که رابطه معروف به فرمول بلک-شولز را استخراج کنند. این مدل توانست بازار قیمت‌گذاری مشتقات را با استفاده از دارایی پایه رونق بخشد، اما با سقوط بازارهای سهام در اکتبر ۱۹۷۸، مدل بلک - شولز کارایی خود را از دست داد و تنها به عنوان پایه‌ای برای سایر مدل‌ها مورد استفاده قرار گرفت.

برای تبیین بیش‌تر این موضوع خاطرنشان می‌کنیم که قیمت دارایی پایه در مدل بلک-شولز از معادله دیفرانسیل تصادفی^{۱۰}

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \quad (1)$$

پیروی می‌کند. در این معادله r نرخ بهره کوتاه‌مدت، σ تلاطم و W_t^Q یک فرایند وینر استاندارد تحت اندازه ریسک خنثی Q است. با توجه به معادله (۱) می‌توان گفت که σ تنها پارامتر غیرقابل مشاهده در این مدل است که می‌توان آن را با استفاده از سوابق تاریخی تغییرات قیمت دارایی پایه در زمان‌های $t_0, t_1, \dots, t_n = t$ ، به صورت

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \right)^2} \quad (2)$$

برآورد کرد. اما این راهبرد به محاسبه نوسان‌پذیری تاریخی^{۱۱} می‌انجامد در حالی که هدف ما اندازه‌گیری تلاطم در آینده است. از همین روی پژوهش‌گران عرصه مالی مقدار تلاطم را با استفاده از قیمت مشتقه در بازار اندازه‌گیری می‌کنند. به بیان دقیق‌تر اگر $P(t, S_t, K, T, \sigma)$ برابر قیمت مشاهده شده‌ی حق اختیار فروش اروپایی با سررسید T و قیمت توافقی K در بازار و $P_{BC}(t, S_t, K, T, r, \sigma)$ تابع قیمت‌گذاری اختیار فروش اروپایی در مدل بلک-شولز باشد آن‌گاه تلاطم بدست‌آمده از برابری

$$P_{BC}(t, S_t, K, T, r, \sigma) = P(t, S_t, K, T, r, \sigma) \quad (3)$$

تلاطم هم‌سو با نگاه بازار یا تلاطم ضمنی نامیده می‌شود. حال اگر ما تلاطم ضمنی مدل را به ازای سررسیدهای متفاوت یک حق اختیار با قیمت توافقی K بدست آوریم مقادیر مختلفی برای تلاطم ضمنی مدل بدست می‌آید که این با فرض ثابت بودن σ در مدل بلک-شولز در تناقض است.

یکی از رهیافت‌های زدودن این کاستی آن است که σ را در معادله (1) فرایندی تصادفی در نظر بگیریم. در واقع مدل‌های تلاطم تصادفی^{۱۲} یکی از رویکردهای انجام شده در جهت اصلاح قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ها هستند که تا حد قابل قبولی توانسته‌اند چولگی و کشیدگی را در رویه‌های تلاطم ضمنی به نمایش بگذارند.

در این مقاله ما به یکی از مهم‌ترین شاخه‌های مدل‌های تلاطم تصادفی یعنی مدل هستون (Heston, 1993) پرداخته‌ایم و ضمن معرفی و بررسی نارسایی‌های مدل هستون کلاسیک، چرایی‌های تکوین مدل هستون مضاعف (Christoffersen, et al, 2009) را نیز بررسی کرده‌ایم و در انتها نشان داده‌ایم که مدل هستون مضاعف بهتر از مدل هستون کلاسیک می‌تواند اثر تبسم تلاطم ضمنی بازار را به نمایش بگذارد. بدیهی‌ست که انجام چنین کاری به تخمین پارامترهای هر دو مدل وابسته است. به همین منظور با استفاده از داده‌های واقعی و با پیاده‌سازی الگوریتم تابع زیان در محیط نرم‌افزار متلب^{۱۳} توانسته‌ایم این مهم را به انجام برسانیم. پس با توجه به توضیحات داده‌شده ساختار مقاله را می‌توان به صورتی که بیان می‌نمائیم در نظر گرفت. در بخش دوم مبانی نظری ارزش‌گذاری بدون آربیتراژ را بیان کرده‌ایم. بخش سوم را به روش‌شناسی پژوهش اختصاص داده‌ایم و در بخش چهارم مزیت‌ها و معایب مدل هستون را بیان کرده‌ایم و با کمک قضیه فایمن-کاک توانسته‌ایم فرمول قیمت‌گذاری اختیار اروپایی را در مدل هستون مضاعف بدست آوریم. و در نهایت در بخش پنجم پارامترهای دو مدل را با بکارگیری رهیافت تابع زیان تخمین زده‌ایم.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

برای قیمت‌گذاری مشتقات مالی مانند اختیار معامله اروپایی معمولاً از راهبرد تشکیل سبدی خودتامین بهره می‌گیرند. منظور از راهبرد سبد خودتامین سبد مالی است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها تنها منحصر به خرید و فروش دارایی پایه و مشتقه مربوط به آن می‌باشد. به عبارتی نه چندان جامع و مانع یک سبد خودتامین سبدی است که تزریق خارجی و برداشت پول ندارد. در مدل‌های تک‌عاملی مانند مدل بلک-شولز برای بدست آوردن فرمول قیمت‌گذاری اختیار اروپایی از استراتژی دلتا پوشش^{۱۴} بهره می‌گیرند. یعنی یک واحد اختیار به قیمت U را می‌فروشند و به جای آن Δ واحد سهام به قیمت S_t می‌خرند. سپس با بکارگیری لم ایتو^{۱۵} (Oksendal, 2002) دینامیک ارزش سبدی را که تشکیل داده‌اند بدست می‌آورند. در گام بعد برای حذف عامل‌های نوسان‌پذیر، Δ را به گونه‌ای انتخاب می‌کنند تا ضریب جمله تصادفی یا ضریب dW_t^Q در آن برابر صفر شود. و در انتها این راهبرد با بحث تشکیل سبدی بدون آربیتراژ (Bjork, 2009) به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌انجامد. گفتنی‌ست که با کمک معادله پیش‌رو گلموگروف^{۱۶} می‌توان فرمول قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی را از روی این معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی استخراج کرد (Ludvigsson, 2013). در مدل‌های دوعاملی مانند مدل هستون برای بدست آوردن فرمول قیمت‌گذاری اختیار اروپایی روندی مشابه را پیش می‌گیرند که به دلیل وجود دو عامل تصادفی در دینامیک دارایی پایه این مدل‌ها، با تشکیل سبدی شامل سهام و تنها یک اختیار با سرسید T

نمی‌توان سبد را پوشش داد. به همین منظور در ابتدا سبدی شامل سهام و دو اختیار اروپایی با سرسیدهای متفاوت T_1 و T_2 را تشکیل می‌دهند. سپس در راستای پوشش سبد، اختیار اروپایی با ارزش V و سرسید T_1 را می‌فروشند و به جای آن Δ_1 واحد سهام و Δ_2 واحد از اختیار U با سرسید T_2 را می‌خرند. و در انتها با کمک تابع مشخصه^{۱۷} فرایند $x_t = \ln S_t$ فرم نیمه بسته قیمت اختیار اروپایی را از روی معادله دیفرانسیل سهمی ایجاد شده استخراج می‌کنند (Heston, 1993).

استفاده از استرژژی پوشش دلنا تنها راه استخراج فرمول قیمت‌گذاری اختیار اروپایی نیست. از راهبردهایی همچون سبد بازسازی شونده^{۱۸} (Bjork, 2009)، الگوی قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای^{۱۹} (بدری، ۱۳۹۲، ص ۲) و حد مدل درخت دوجمله‌ای^{۲۰} (Cox, et al, 1979) نیز می‌توان برای این منظور استفاده کرد. اما بکارگیری این راهبردها در مدل‌های چند عاملی با پیچیدگی‌های فراوانی همراه است که کاربرد آن‌ها را محدود می‌کند. در مدل‌های چندعاملی معمولاً با استفاده از قضیه فایمن-کاک چند بعدی^{۲۱} معادله دیفرانسیل تصادفی قیمت دارایی پایه این مدل‌ها را به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل می‌کنند (Grzelak and Oosterlee, 2009) و با کمک معادله ساختار زمانی آفین^{۲۲} (Duffie, et al, 2000) و قضیه تبدیل فوریه وارون فرم نیمه بسته قیمت اختیار اروپایی را بدست می‌آورند.

در تمامی مدل‌های مالی تک عاملی یا چندعاملی مهم‌ترین گام بعد از استخراج فرمول قیمت‌گذاری، تخمین پارامترهای مدل است. بدون تخمین این پارامترها هرگونه بحثی در باب کارایی مدل بی‌معناست. برای تخمین پارامترهای مدل‌های مالی می‌توان از روش‌های همچون الگوریتم بهینه‌سازی نلد-مید (Nelder and Mead., 1965) روش حداکثر درست‌نمایی^{۲۳} (Hald, 1999)، روش تابع زیان، روش تخمین استوار (Press, et al, 1992) و راهبرد تکامل تفضیلی (Storn and Price., 1997) استفاده کرد. در دهه اخیر پژوهش‌های فراوانی پیرامون تخمین پارامترهای مدل هستون کلاسیک صورت گرفته است که از این میان می‌توان به مقاله‌های اتیه و وال (Atiya and Wall, 2009)، گوتیه و ریویل (Gauthier and Rivaille, 2009)، کیلین (Kilin, 2007) و ژیلی و شومان (Gilli and Schumann, 2011) اشاره کرد در این مقاله ما نیز با کمک رهیافت تابع زیان پارامترهای مدل هستون کلاسیک و هستون مضاعف را تخمین زده‌ایم و با نمایش اثر تبسم تلاطم ضمنی این مدل‌ها نشان داده‌ایم که مدل هستون مضاعف کارکرد بهتری نسبت به مدل هستون کلاسیک دارد.

۳- روش‌شناسی پژوهش

برای تحقق اهدافی که در بخش‌های قبل به آن‌ها اشاره کردیم نیازمند بهره‌گیری از روش پژوهشی متناسب با مدل‌های موردنظرمان هستیم. چراکه در مدل‌های هستون کلاسیک و هستون مضاعف نرخ بهره ثابت است و جمله پرش وجود ندارد (نیسی، ص ۸۰، ۱۳۹۱) بنابراین برای تخمین پارامترهای مدل باید داده‌هایمان را از بازاری با این ویژگی‌ها استخراج کنیم. روش تحقیق مورد استفاده در این مقاله، تحقیق موردی^{۲۴} است که یکی از انواع راهبردهای تحقیق کیفی محسوب می‌شود. این روش بر پایه‌ی مدارک

محسوس و مبتنی بر مشاهده دقیق و عینی است که در خلال زمان معینی رخ داده‌اند (Yin, 2009). به همین منظور از قیمت‌های اختیار فروش سهام شرکت مایکروسافت با سررسید یک‌ماهه بهره‌گرفته‌ایم. گفتنی‌ست که این اختیار در بازار سهام آمریکا (نزدک^۵) مبادله شده‌است که جزئیات فروش بخشی از آن را در جدول ۲ آورده‌ایم.

۴- مدل‌های پژوهشی و روش حل عددی آن‌ها

در مدل‌های تلاطم تصادفی، تلاطم خود به عنوان فرایندی مستقل در نظر گرفته می‌شود. به طور کلی دینامیک داری پایه در مدل‌های تلاطم تصادفی به صورت

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + f(v_t) S_t dW_1(t) \\ dv_t &= \alpha(t, v_t) dt + \sigma(t, v_t) dW_2(t) \end{aligned} \quad (۴)$$

است که در آن α عددی ثابت، f تابعی نامنفی، $\mu: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ و $\sigma: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ توابعی هموار، و $W_1(t)$ و $W_2(t)$ دو فرایند وینر استاندارد با ضریب همبستگی ρ می‌باشند. مدل‌های هول و وایت (Hull and White, 1988) و اسکات (Cheney and Scott, 1989)، استین و استین (Stein and Stein, 1991) از جمله مدل‌های پیشگام در این رهیافت هستند که اجزای دینامیک داری پایه‌شان در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱: دینامیک داری پایه در مدل‌های تلاطم تصادفی پیشگام

مدل	$f(v_t)$	$\alpha(t, v_t)$	$\sigma(t, v_t)$
هول و وایت	$\sqrt{v_t}$	αv_t <td>σv_t</td>	σv_t
ویگینز	e^{v_t}	αv_t	σv_t
چنزی و اسکات	e^{v_t}	$\kappa(\theta - v_t)$	σ
استین و استین	$ v_t $	$\kappa(\theta - v_t)$	σ

با وجود آن‌که مدل‌های پیشگام توانستند اثر تبسم تلاطم ضمنی بازارهای مالی را تاحدودی نشان دهند، اما نبود فرمول صریح برای محاسبه قیمت اختیار اروپایی در این مدل‌ها از کارایی آن‌ها می‌کاست. این کاستی در مدل هستون (Heston, 1993) برطرف شد. در حقیقت مدل هستون نخستین مدل از مدل‌های تلاطم تصادفی بود که برای اولین بار با یک اسلوب نوین فرمولی برای محاسبه قیمت اختیار اروپایی برحسب توابع مشخصه ارائه کرد.

۱-۴ مدل هستون، مزیت‌ها و نارسایی‌ها

در مدل هستون کلاسیک $f(v_t) = \sqrt{v_t}$ یک فرایند ایتو از نوع کاکس-اینگرسول و راس (Cox, et al., 1985) است. هستون نشان داد که اگر دینامیک دارایی پایه به صورت

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - q)S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t(t) \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_v(t) \\ E^Q[dW_t(t)dW_v(t)] &= \rho dt \end{aligned} \quad (5)$$

باشد آنگاه می‌توان قیمت T -اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی K که روی دارایی پایه با قیمت آنی $x_t = \ln S_t$ بسته شده‌است را از رابطه

$$C(t, S_t, v_t, q, K, T) = S_t e^{-qt} P_1 - K e^{-rt} P_2 \quad (6)$$

بدست آورد. گفتنی‌ست که در این رابطه r نرخ بهره ثابت، q بازده سود سهام و τ زمان تا سررسید است. همچنین P_1 و P_2 توابع چگالی انتقال فرایند x_t تحت اندازه مارتینگل‌های متفاوتی هستند بطوری که

$$P_j(x_t, v_t; x_T, \ln K) = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; t, x, v)}{i\phi} \right) d\phi \quad (7)$$

$$f_j(\phi; v_t, x_t) = \exp[C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_t + i\phi x_t]$$

9

$$C_j(\tau, \phi) = (r - q)i\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left((b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - \tau \ln \frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right) \quad (8)$$

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - g_j e^{d_j \tau}} \right)$$

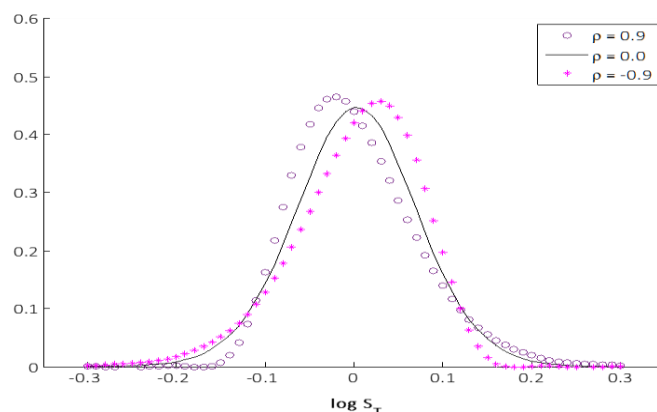
درضمن پارامترهای بکار رفته در رابطه (۸) به ازای $j = 1, 2$ عبارتند از

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}$$

$$d_j = \sqrt{(b_j - \rho\sigma i\phi)^2 - \sigma^2(\tau i u_j \phi - \phi^2)}$$

$$u_1 = \frac{1}{\tau}, u_2 = -\frac{1}{\tau}, a = \kappa\theta, b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, b_2 = \kappa + \lambda$$

یکی از مزیت‌های مدل هستون نسبت به مدل بلک-شولز این است که می‌توان با دگرگونی پارامترهای آن در نمودار تابع چگالی احتمال فرایند $x_T = \ln S_T$ چولگی و کشیدگی ایجاد کرد. این پدیده با واقعیت‌های تجربی نیز به درستی سازگار است. برای نمونه هستون نشان داد که پارامتر ρ روی سنگینی دم‌های توزیع اثر می‌گذارد، به این شیوه که اگر $\rho > 0$ با افزایش تلاطم، قیمت دارایی پایه افزایش می‌یابد و در نتیجه دم سمت راست توزیع کشیده‌تر می‌شود. در این حالت توزیع دارای چولگی به سمت راست می‌شود و زمانی که $\rho < 0$ با افزایش تلاطم، قیمت دارایی پایه کاهش می‌یابد بنابراین دم سمت چپ توزیع کشیده‌تر و دم سمت راست فشرده می‌شود. در این حالت توزیع دارای چولگی به سمت چپ می‌شود. در شکل ۱ این موضوع به خوبی نشان داده شده است.



شکل ۱: نمودار تابع چگالی احتمال فرایند $\ln S_T$

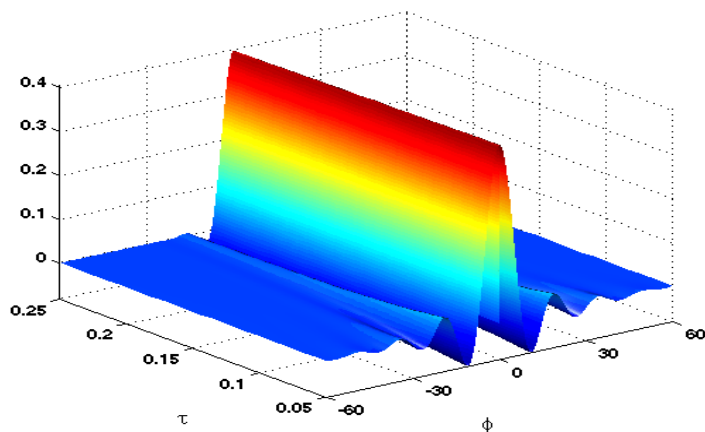
برای رسم این نمودار از پارامترهای جدول ۱ مرجع (Heston, 1993) استفاده کرده‌ایم:

$$T = 0.5, K = 100, r = 0.05, q = 0.05, \kappa = 2, \theta = 0.01, \sigma = 0.1, \nu = 0.01$$

با این وجود مدل هستون هم همانند بسیاری از مدل‌های پیشگام، نارسایی‌های دارد که یکی از آن‌ها ناپیوستگی‌ها و نوسان‌های گاهاً نامیرای انتگرالده

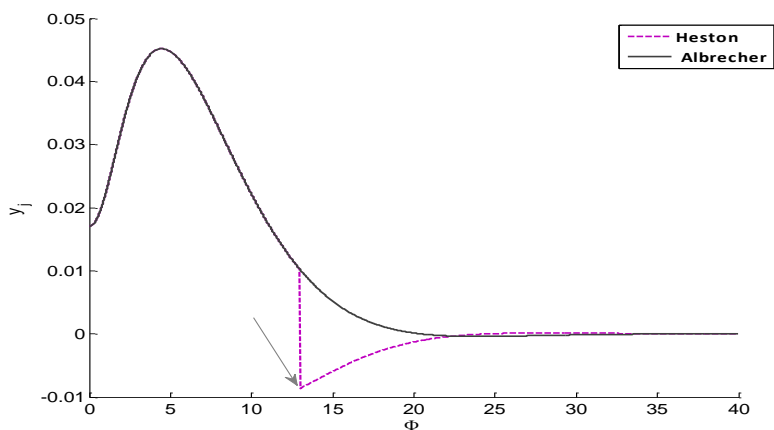
$$y_j = \text{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(\phi; t, x, \nu)}{i\phi} \right)$$

به ویژه در سررسیدهای کوتاه مدت است. در شکل ۲ نمونه‌ای از این نوسان‌ها را رسم کرده‌ایم.



شکل ۲: نوسان‌های انتگرالده در سررسیدهای کوتاه مدت

این نوسان‌ها و ناپیوستگی‌ها، پایداری و سرعت همگرایی روش‌های عددی حل انتگرال را کاهش می‌دهند و این امر موجب کاهش دقت برآورد قیمت اختیار می‌شود. آلبرچر (Albrecher, et al, 2007) نشان داد که با تغییر توابع $D_j(\tau, \phi)$ و $C_j(\tau, \phi)$ در رابطه (۸) می‌توان این ناپیوستگی‌ها را در برخی از موارد از بین برد. شکل ۳ نمودار انتگرالده در رویکردهای هستون و آلبرچر را نشان می‌دهد.



شکل ۳: نمودار انتگرالده در رویکردهای هستون و آلبرچر

برای رسم این نمودار از پارامترهای جدول ۲ مرجع (Albrecher, 2007) استفاده کرده‌ایم:
 $S = 100$, $K = 100$, $r = 0.025$, $q = 0$, $\kappa = 1/5768$
 $\theta = 0.0398$, $\sigma = 0.5751$, $v = 0.0175$, $\rho = -0.5711$

برای زدودن این نارسایی‌ها، نمایش‌های دیگری نیز از مدل هستون ارائه شده‌اند که از میان آنها می‌توان به نمایش گر و مدّن (Carr and Madan, 1999) ، لویس (Lewis., 2000) و آتاری (Attari, 2004) اشاره کرد. اما هیچ یک از این نمایش‌ها نیز یارای پوشاندن پاشنه‌ی آشیل مدل هستون را ندارند چرا که این نمایش‌ها تنها سرعت محاسبات و میزان همگرایی روش‌های حل عددی انتگرال را بهبود می‌بخشند. یکی از نارسایی‌های سترگ مدل هستون ناهم‌پوشانی نوسان‌های هم‌سو با نگاه بازار در برخی از مثال‌ها، به ویژه در سررسیدهای کوتاه مدت است. برای نمایش این کاستی از اختیارهای فروش سهام شرکت مایکروسافت با سررسید یک ماه استفاده کرده‌ایم. این اختیار در بازار سهام آمریکا (نزدک) مبادله شده است که جزئیات فروش بخشی از آن در جدول ۲ درج گردیده است.

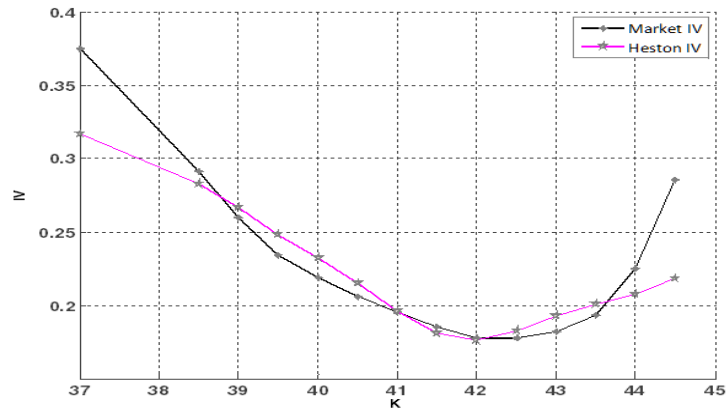
جدول ۲- قیمت اختیار فروش شرکت مایکروسافت در دوم آوریل ۲۰۱۵

قیمت توافقی	قیمت پایانی	قیمت پیشنهادی	قیمت درخواستی	تلاطم ضمنی بازار
۳۷	۰/۰۱	۰/۰۰	۰/۰۲	٪۳۷/۵
۳۸/۵۰	۰/۰۵	۰/۰۱	۰/۰۴	٪۲۹/۱۰
۳۹	۰/۱۲	۰/۰۲	۰/۰۵	٪۲۵/۹۸
۳۹/۵۰	۰/۰۸	۰/۰۴	۰/۰۷	٪۲۳/۴۴
۴۰	۰/۱۰	۰/۰۹	۰/۱۲	٪۲۱/۸۸
۴۰/۵۰	۰/۱۷	۰/۱۸	۰/۲۱	٪۲۰/۶۱
۴۱	۰/۳۱	۰/۳۳	۰/۳۶	٪۱۹/۵۳
۴۱/۵۰	۰/۴۶	۰/۵۶	۰/۵۹	٪۱۸/۵۶
۴۲	۰/۷۵	۰/۸۹	۰/۹۱	٪۱۷/۷۷
۴۲/۵۰	۱/۲۰	۱/۲۴	۱/۳۲	٪۱۷/۷۷
۴۳	۱/۵۶	۱/۴۲	۱/۷۹	٪۱۹/۳۴
۴۳/۵۰	۱/۷۵	۱/۸۹	۲/۲۷	٪۲۰/۳۱
۴۴	۲/۹۰	۲/۵۸	۲/۸۰	٪۲۸/۵۲

در شکل ۴ این نارسایی به خوبی نشان داده شده است. شایان‌ذکر است که پارامترهای بهینه برای مدل هستون در این نمودار به صورت

$$r = 0.012, q = 0, \kappa = 0.0428, \theta = 0.3554, \sigma = 2/9820, \rho = -0.4314, v = 0.0671$$

تخمین زده شده‌اند که چگونگی انجام آن را در بخش ۴ شرح خواهیم داد.



شکل ۴: نمودار تلاطم ضمنی مدل هستون

حال برای چیره شدن بر این چالش باید چاره‌های بیانده‌شیم. یک راه پالودن این کاستی آن است که نرخ بهره را در این مدل، فرایندی تصادفی در نظر بگیریم اما دگرگونی‌های بسیار نامحسوس نرخ بهره در این بازه‌ی زمانی این انگاره را رد می‌کند. راه‌کار دیگر افزودن فرایند پرش به دینامیک دارایی‌پایه است ولی تغییرات قیمت سهام شرکت میکروسافت در این برهه، خط بطلانی بر این فرضیه می‌کشد. راه دیگر افزودن فرایند واریانس $\{v_r(t)\}$ به دینامیک دارایی‌پایه در رابطه (۵) است. در بخش بعد با اضافه کردن فرایند واریانس افزون به مدل هستون، به یک مدل سه عاملی می‌رسیم که به مدل هستون مضاعف مشهور است.

۲-۴ مدل هستون مضاعف

همان‌طور که در بخش پیش دیدیم پارامترهای مدل هستون کلاسیک همیشه توانایی تطابق با تلاطم ضمنی بازارهای مالی را ندارند. در این بخش با معرفی و بررسی مدل هستون مضاعف، نشان می‌دهیم که فرایند واریانس افزون این توانایی را به مدل می‌دهد تا نرمش بیش‌تری نسبت به داده‌های بازاری پیدا کند. به همین منظور بازار نقدشونده‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن دو نوع دارایی مبادله می‌شود. یکی دارایی غیر ریسکی مانند حساب بازاری پول و دیگری دارایی ریسکی مانند سهام. قیمت این دو دارایی را در هر لحظه به ترتیب با B_t و S_t نمایش می‌دهیم. در مدل هستون مضاعف دینامیک دارایی پایه تحت اندازه ریسک خنثی Q به صورت

$$\begin{aligned} dS_t &= (r - q)S_t dt + \sqrt{v_1(t)} S_t dW_1(t) + \sqrt{v_r(t)} S_t dW_r(t) \\ dv_1(t) &= \kappa_1(\theta_1 - v_1) dt + \sigma_1 \sqrt{v_1(t)} dW_{v_1}(t) \\ dv_r(t) &= \kappa_r(\theta_r - v_r) dt + \sigma_r \sqrt{v_r(t)} dW_{v_r}(t) \end{aligned} \quad (9)$$

می‌باشد که در آن r نرخ بهره ثابت، q ثمر دارایی پایه و $\{W_k\}_{k=1}^T$ فرایندهای وینر تحت اندازه ریسک خنثی Q هستند به طوری که

$$\begin{array}{cc|cc}
 E^Q[dW_i dW_k] & W_1 & W_r & W_r & W_f \\
 \hline
 W_1 & dt & \cdot & \rho_r dt & \cdot \\
 W_r & \cdot & dt & \cdot & \rho_r dt \\
 W_r & \rho_r dt & \cdot & dt & \cdot \\
 W_f & \cdot & \rho_r dt & \cdot & dt
 \end{array} \quad (10)$$

در این مدل به K_j سرعت بازگشت به میانگین^{۲۶}، به θ_j میانگین بلند مدت^{۲۷} و به σ_j تلاطم فرایند واریانس گفته می‌شود. وجه تسمیه آن‌ها به این سبب است که وقتی $K_j \rightarrow \infty$ آنگاه برای $j=1, 2$ داریم

$$E^Q[v_j(t) | v_j(s)] \rightarrow \theta$$

به همین دلیل به فرایند $\{v_j(t)\}$ فرایند بازگشت به میانگین گفته می‌شود. با توجه به رابطه (۹) می‌توان گفت که فرایندهای واریانس، یعنی $\{v_1(t)\}$ و $\{v_r(t)\}$ هر دو از مدل سی.آی.آر^{۲۸} پیروی می‌کنند. گفتنی‌ست که مدل سی.آی.آر اولین بار توسط کاکس، اینگرسول و راس (Cox, et al., 1985) برای مدل‌سازی نرخ بهره کوتاه مدت بکار گرفته شد. در ادامه نشان می‌دهیم که فرایند $\{v_r(t)\}$ در مدل هستون مضاعف یک جمله اضافی و به تعبیری آپاندیس پیکره‌ی دارایی پایه نیست.

قضیه ۴-۲-۱ اگر فرایند دارایی پایه از معادله‌های (۹) و (۱۰) پیروی کند و $v = v_1 + v_r$ آنگاه

$$Corr[dS/S, dv] = \frac{\sigma_1 \rho_1 v_1 + \sigma_r \rho_r v_r}{\sqrt{\sigma_1^2 v_1 + \sigma_r^2 v_r} \sqrt{v_1 + v_r}} dt \quad (11)$$

برهان: با توجه به رابطه‌های (۹) و (۱۰) و این حقیقت که $dt dW_k(t) = 0$ پس برای $j=1, 2$ داریم

$$Cov[dS_t/S_t, dv_j] = \sigma_j \rho_j v_j dt$$

در نتیجه

$$Cov[dS/S, dv] = (\sigma_1 \rho_1 v_1 + \sigma_r \rho_r v_r) dt \quad (12)$$

از طرفی

$$Var[dS/S] = (v_1 + v_r) dt = v dt \quad (13)$$

$$Var[dv] = (\sigma_1^2 v_1 + \sigma_r^2 v_r) dt$$

با ترکیب رابطه‌های (۱۲) و (۱۳) حکم ثابت می‌شود

$$Corr[dS/S, dv] = \frac{Cov[dS/S, dv]}{\sqrt{Var[dS/S] Var[dv]}} = \frac{\sigma_s \rho_s v_s + \sigma_v \rho_v v_v}{\sqrt{\sigma_s^2 v_s + \sigma_v^2 v_v} \sqrt{v_s + v_v}} dt$$

بنابراین می‌توان گفت که ضریب همبستگی میان فرایندهای بازده دارایی پایه و تغییرات فرایند واریانس کل، در مدل هستون مضاعف، خود فرایندی تصادفی است در حالی که در مدل هستون کلاسیک یا دو عاملی این ضریب همبستگی ثابت می‌باشد:

$$Corr[dS/S, dv] = \rho dt$$

پس مدل هستون کلاسیک، بر خلاف مدل هستون مضاعف، همیشه جواب‌گوی تغییر شیب‌های نمودار تلاطم ضمنی در بازارهای مالی نیست. اما درستی این ادعا در عمل نیز باید سنجیده شود. به همین منظور ناگزیریم که جواب بسته‌ی قیمت اختیار خرید اروپایی را در این مدل بدست آوریم.

لم ۲-۲-۴ بازار ناکاملی شامل دارای ریسکی با قیمت آنی $x_t = \ln S_t$ و دارایی غیر ریسکی B_t با دینامیک $dB_t = rB_t dt$ را در نظر بگیرید. اگر Q_S اندازه مارتینگل معادل با اندازه ریسک خنثی Q با چگالی یا مشتق رادون-نیکودیم $dQ_S/dQ = \frac{S_T/S_t}{B_T/B_t}$ باشد آن‌گاه ارزش اختیار خرید اروپایی با سررسید T و

قیمت توافقی K از رابطه

$$C(t, S_t, v_s(t), v_v(t), K, T) = S_t P_1 - K e^{-r(T-t)} P_2 \quad (14)$$

بدست می‌آید که در آن

$$P_1 = Q^S(x_T > \ln K | v_s(t), v_v(t), x_t)$$

$$P_2 = Q(x_T > \ln K | v_s(t), v_v(t), x_t)$$

برهان: بنابر قاعده اساسی قیمت‌گذاری (Bjork, 2009) داریم

$$C(t, x_t, v_s(t), v_v(t), K, T) = e^{-r\tau} E_{t, S_t, v_s, v_v}^Q [(S_T - K)^+] \quad (15)$$

فرض می‌کنیم $\mathbf{1}_A$ تابع نشان‌گر^{۲۹} مجموعه A باشد در این صورت

$$(S_T - K)^+ = (S_T - K) \mathbf{1}_{S_T > K} \quad (16)$$

قرار می‌دهیم $\tau = T - t$ از ویژگی خطی بودن امید شرطی و رابطه‌های (۱۶) و (۱۵) نتیجه می‌شود

$$C(t, S_t, v_s(t), v_v(t), K, T) = \underbrace{e^{-r\tau} E_{t, S_t, v_s, v_v}^Q [S_T \mathbf{1}_{S_T > K}]}_I - \underbrace{e^{-r\tau} K E_{t, S_t, v_s, v_v}^Q [\mathbf{1}_{S_T > K}]}_J \quad (17)$$

حال به صورت جداگانه به محاسبه J و I می‌پردازیم:

$$J = E_{t, S_t, v_s, v_v}^Q [\mathbf{1}_{S_T > K}] = Q(S_T > K | S_t, v_s) = Q(x_T > \ln K | v_s(t), v_v(t), x_t) = P_2 \quad (18)$$

از آن جا که S_t نسبت به پالایه طبیعی $\mathcal{F}_t = \sigma(\{S_u \mid 0 \leq u \leq t\})$ سازوار^{۳۰} است و B_t فرایندی تعینی می‌باشد پس

$$I = S_t E_{t,S_t,v_t,v_t}^{Q_S} \left(e^{-r\tau} \frac{S_T}{S_t} \mathbf{1}_{S_T > K} \right) = S_t E_{t,S_t,v_t,v_t}^{Q_S} \left(\frac{S_T / S_t}{B_T / B_t} \mathbf{1}_{S_T > K} \right) = S_t E_{t,S_t,v_t,v_t}^{Q_S} [\mathbf{1}_{S_T > K}]$$

در نتیجه

$$I = S_t E_{t,S_t,v_t,v_t}^{Q_S} [\mathbf{1}_{x_T > \ln K}] = S_t Q_S(x_T > \ln K \mid v_t(t), v_t(t), x_t) = S_t P_1 \quad (۱۹)$$

با جایگذاری روابط (۱۸) و (۱۹) در رابطه (۱۷) حکم بدست می‌آید. □
در قدم بعد باید P_1 و P_2 در رابطه را بدست آوریم. اما انجام این کار به ابزارهایی احتیاج دارد که ما آن‌ها را در قالب چند قضیه ارائه کرده‌ایم.

تعریف ۴-۲-۳ فرایند وینر k -بعدی و ناهمبسته $W = (W_1, W_2, \dots, W_k)^T$ را نظر بگیرید. فرض کنید برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم

$$dX_i = \mu_i dt + \sum_{j=1}^k \sigma_{ij} dW_j(t)$$

بطوری که μ_i -ها فرایندهایی سازوار و انتگرال‌پذیر و σ_{ij} -ها فرایندهایی سازوار و مربع انتگرال‌پذیر باشند و $0 \leq t \leq T$. قرار دهید $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n]^T$ و $\sigma = (\sigma_{ij})_{n \times k}$ در این صورت به جواب معادله دیفرانسیل تصادفی

$$dX(t) = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW(t) \quad (۲۰)$$

فرایند انتشار آفین گفته می‌شود هرگاه بردارهای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^n$ و ماتریس‌های $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ چنان یافت شوند که

$$\mu(t, X_t) = \alpha + \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j(t) \quad (۲۱)$$

قضیه ۴-۲-۴ فرض کنید جواب معادله دیفرانسیل تصادفی (۲۰) یک فرایند انتشار آفین باشد آن‌گاه تابع مشخصه آن نمایی-خطی است یعنی به صورت

$$f(\tau, \phi, X_1, \dots, X_n) = \exp[A(\tau, \phi) + D_1(\tau, \phi)X_1 + \dots + D_n(\tau, \phi)X_n] \quad (۲۲)$$

است که در آن $A(\tau, \phi)$ و $D_1(\tau, \phi), \dots, D_n(\tau, \phi)$ توابعی تعینی^{۳۱} برحسب $\tau = T - t$ و ϕ می‌باشند و

$$f(\cdot, \phi, X_1, \dots, X_n) = \exp[i\phi X_T] \quad (۲۳)$$

برهان. به (Khal, 2005) رجوع کنید.

قضیه ۴-۲-۵ فرایند دارایی پایه در مدل هستون مضاعف یک فرایند انتشار آفین است و تابع مشخصه آن به صورت نمایی-خطی می‌باشد.

برهان: ابتدا با استفاده از لم ایتو دینامیک دارایی پایه در مدل هستون مضاعف را برای فرایند $x_t = \ln S_t$ به صورت

$$dx_t = \left(r - q - \frac{1}{\gamma} (v_1 + v_2) \right) dt + \sqrt{v_1} dW_1 + \sqrt{v_2} dW_2$$

$$dv_1(t) = \kappa_1 (\theta_1 - v_1) dt + \sigma_1 \sqrt{v_1(t)} dW_{\gamma}(t)$$

$$dv_2(t) = \kappa_2 (\theta_2 - v_2) dt + \sigma_2 \sqrt{v_2(t)} dW_{\gamma}(t)$$

بازنویسی می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$W_1 = B_1, \quad W_2 = B_2$$

$$W_{\gamma} = \rho_1 B_1 + \sqrt{1 - \rho_1^2} B_2$$

$$W_{\gamma} = \rho_2 B_2 + \sqrt{1 - \rho_2^2} B_1$$

که در آن B_i ها فرایندهای وینر استاندارد دودو مستقل می‌باشند. بنابراین

$$dx_t = [r - q - 1/\gamma (v_1 + v_2)] dt + \sqrt{v_1} dB_1(t) + \sqrt{v_2} dB_2(t) \quad (24)$$

$$dv_1(t) = \kappa_1 (\theta_1 - v_1) dt + \sigma_1 \sqrt{v_1} dB_1(t) + \sigma_1 \sqrt{v_1(1 - \rho_1^2)} dB_2(t)$$

$$dv_2(t) = \kappa_2 (\theta_2 - v_2) dt + \sigma_2 \sqrt{v_2} dB_2(t) + \sigma_2 \sqrt{v_2(1 - \rho_2^2)} dB_1(t)$$

قرار می‌دهیم

$$\sigma(t, x_t) = \begin{pmatrix} \sqrt{v_1} & \sqrt{v_2} & \cdot & \cdot \\ \sigma_1 \sqrt{v_1} \rho_1 & \cdot & \sigma_1 \sqrt{v_1(1 - \rho_1^2)} & \cdot \\ \cdot & \sigma_2 \sqrt{v_2} \rho_2 & \cdot & \sigma_2 \sqrt{v_2(1 - \rho_2^2)} \end{pmatrix} \quad (25)$$

و

$$\mu(t, x_t) = \begin{pmatrix} r - q - 1/\gamma (v_1 + v_2) \\ \kappa_1 (\theta_1 - v_1) \\ \kappa_2 (\theta_2 - v_2) \end{pmatrix} \quad (26)$$

و

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_{\gamma} \\ B_{\gamma} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_t = \begin{pmatrix} x_t(t) \\ x_{\gamma}(t) \\ x_{\gamma}(t) \\ x_{\gamma}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t \\ v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix} \quad (27)$$

در این صورت

$$d\mathbf{X}_t = \mu(t, x_t) dt + \sigma(t, x_t) d\mathbf{B}_t \quad (28)$$

حال بردارهای حقیقی مقدار α_j و ماتریس‌های β_j را برای $j = 0, 1, 2, 3$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha = \begin{pmatrix} r - q \\ \kappa_1 \theta_1 \\ \kappa_2 \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -\cdot / \Delta \\ -\kappa_1 \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -\cdot / \Delta \\ \cdot \\ -\kappa_2 \end{pmatrix} \quad (29)$$

و

$$\beta = \beta_1 = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & \sigma_1 \rho_1 & \cdot \\ \sigma_1 \rho_1 & \sigma_1^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \sigma_2 \rho_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_2 \rho_2 & \cdot & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad (30)$$

از آنجا که

$$\sigma(t, x_t) \sigma(t, x_t)^T = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 & \sigma_1 \rho_1 v_1 & \sigma_2 \rho_2 v_2 \\ \sigma_1 \rho_1 v_1 & \sigma_1^2 v_1 & \cdot \\ \sigma_2 \rho_2 v_2 & \cdot & \sigma_2^2 v_2 \end{pmatrix} \quad (31)$$

پس

$$\mu(t, x_t) = \alpha + \sum_{j=1}^3 \alpha_j x_j(t) \quad , \quad \sigma(t, x_t) \sigma(t, x_t)^T = \beta + \sum_{j=1}^3 \beta_j x_j(t)$$

لذا بنابر قضیه ۴-۲-۴ تابع مشخصه فرایند $x_t = \ln S_t$ به صورت نمایی خطی است.

□

قضیه ۴-۲-۴ ارزش T -اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی K که روی یک واحد دارایی پایه‌ای با قیمت آنی $x_t = \ln S_t$ بسته شده است در مدل هستون مضاعف از رابطه

$$C(t, S_t, v_{1,t}, v_{2,t}, K, T) = S_t e^{-q\tau} P_1 - K e^{-r\tau} P_2$$

بدست می‌آید که در آن زمان تا سررسید و q بازده سود دارایی پایه است همچنین

$$P_1(x_t, v_{1,t}, v_{2,t}; x_T, \ln K) = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\pi} \int_{\cdot}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln K} f(\phi - i; x_t, v_{1,t}, v_{2,t})}{i\phi S_t e^{(r-q)\tau}} \right) d\phi$$

$$P_2(x_t, v_{1,t}, v_{2,t}; x_T, \ln K) = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\pi} \int_{\cdot}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln K} f(\phi; x_t, v_{1,t}, v_{2,t})}{i\phi} \right) d\phi$$

$$f(\phi; x_t, v_{1,t}, v_{2,t}) = \exp[A(\tau, \phi) + i\phi x_t + D_1(\tau, \phi) v_1(t) + D_2(\tau, \phi) v_2(t)]$$

و برای $j=1, 2$ داریم

$$A(\tau, \phi) = (r - q)i\phi\tau + \sum_{j=1}^{\gamma} \frac{\kappa_j \theta_j}{\sigma_j^{\gamma}} \left((k_j - \rho_j \sigma_j i\phi - d_j)\tau - \gamma \ln \frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right)$$

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{\kappa_j - \rho_j \sigma_j \phi i + d_j}{\sigma_j^{\gamma}} \left(\frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - g_j e^{d_j \tau}} \right)$$

$$d_j = \sqrt{(\kappa_j - \rho_j \sigma_j \phi i)^{\gamma} + \sigma_j^{\gamma} \phi(\phi + i)}, \quad g_j = \frac{\kappa_j - \rho_j \sigma_j \phi i + d_j}{\kappa_j - \rho_j \sigma_j \phi i - d_j}$$

برهان: در قضیه ۴-۲-۵ نشان دادیم که فرایند $x_t = \ln S_t$ یک فرایند انتشار آفین است پس تابع مشخصه-ی آن به صورت

$$f(\phi; x_t, v_{1,t}, v_{\gamma,t}) = \exp[A(\tau, \phi) + D_1(\tau, \phi)x_t + D_1(\tau, \phi)v_{1,t} + D_{\gamma}(\tau, \phi)v_{\gamma,t}]$$

می‌باشد. بنابراین تنها کار باقی‌مانده مشخص کردن این توابع می‌باشد. دافی و همکارانش (Duffie, et al, 2000) نشان دادند که توابع $A(\tau, \phi)$ و $D_k(\tau, \phi)$ به ازای $k = 0, 1, 2$ از حل معادله‌ها

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\mathbf{D}\alpha - \frac{1}{\gamma} \mathbf{D}\beta \cdot \mathbf{D}^{\top} \quad (32)$$

$$\frac{\partial D_k}{\partial t} = -\mathbf{D}\alpha_k - \frac{1}{\gamma} \mathbf{D}\beta_k \cdot \mathbf{D}^{\top}$$

بدست می‌آیند که در آن $\mathbf{D} = (D_0, D_1, D_{\gamma})$. با جایگذاری رابطه‌های (۲۹) و (۳۰) در معادله (۳۲) به ازای $j = 1, 2$ به معادله

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = (r - q)i\phi + \kappa_1 \theta_1 D_1 + \kappa_{\gamma} \theta_{\gamma} D_{\gamma} \quad (33)$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial \tau} = 0$$

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = \frac{1}{\gamma} \sigma_j^{\gamma} D_j^{\gamma} - (\kappa_j - \rho_j \sigma_j i\phi) D_j - \frac{1}{\gamma} \phi(\phi + i)$$

می‌رسیم. جواب معادله‌ی $\partial D_1 / \partial \tau = 0$ با در نظر گرفتن شرط مرزی (۲۳) به راحتی تعیین می‌شود

$$D_1(\tau, \phi) = i\phi$$

از حل معادله‌های ریکاتی^{۳۲}

$$\frac{\partial D_j}{\partial \tau} = \frac{1}{\gamma} \sigma_j^{\gamma} D_j^{\gamma} - (\kappa_j - \rho_j \sigma_j i\phi) D_j - \frac{1}{\gamma} \phi(\phi + i), \quad j = 1, 2$$

توابع $D_1(\tau, \phi)$ و $D_{\gamma}(\tau, \phi)$ یعنی

$$D_j(\tau, \phi) = \frac{\kappa_j - \rho_j \sigma_j \phi i + d_j}{\sigma_j^{\gamma}} \left(\frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - g_j e^{d_j \tau}} \right)$$

بدست می‌آیند. این توابع را در معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول

$$\frac{\partial A}{\partial \tau} = (r - q)i\phi + \kappa_1 \theta_1 D_1 + \kappa_r \theta_r D_r$$

قرار می‌دهیم در این صورت داریم

$$A(\tau, \phi) = (r - q)i\phi\tau + \sum_{j=1}^r \frac{\kappa_j \theta_j}{\sigma_j^\nu} \left((k_j - \rho_j \sigma_j i\phi - d_j)\tau - \nu \ln \frac{1 - g_j e^{d_j \tau}}{1 - g_j} \right)$$

و در نتیجه تابع مشخصه‌ی فرایند $S_t = \ln S_t$ بدست می‌آید. با مشخص شدن f ، توابع P_1 و P_r نیز با استفاده از قضیه ژیل-پلاز (Gil-Pelaez, 1951) بدست می‌آیند.

نتیجه ۴-۲-۷ ارزش T -اختیار فروش اروپایی با قیمت توافقی K که روی دارایی پایه‌ای با قیمت آنی S_t بسته شده است در مدل هستون مضاعف از رابطه

$$P(t, S_t, \nu_{1,t}, \nu_{r,t}, K, T) = C(t, S_t, \nu_{1,t}, \nu_{r,t}, K, T) + K e^{-r\tau} - S_t e^{-q\tau} \quad (34)$$

بدست می‌آید.

۴-۳- روش انتگرال‌گیری گاوس-لاگر

در بخش قبل توانستیم جواب بسته قیمت اختیار معامله‌های خرید و فروش اروپایی را در مدل هستون مضاعف بدست آوریم اما استفاده از فرمول (۳۴) مستلزم محاسبه انتگرالی ناسره با کمک روش‌های حل عددی انتگرال می‌باشد چرا که انتگرالده در قضیه ۴-۲-۶ فاقد تابع اولیه است. در این بخش قصد داریم به معرفی و بررسی چندجمله‌ای‌های لاگر و روش انتگرال‌گیری گاوسی بپردازیم.

تعریف ۴-۳-۱ به معادله دیفرانسیل $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$ معادله لاگر با پارامتر λ گفته می‌شود که برای $n \in \mathbb{N}$ یکی از جواب‌هایش به صورت

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{(k!)^\nu (n-k)!} x^k$$

است. ثابت شده است که چندجمله‌ای‌های لاگر نسبت به تابع وزن $w(x) = e^x$ در بازه $(0, \infty)$ متعامدند و در رابطه بازگشتی

$$nL_n(x) = (\nu n - 1 - x)L_{n-1}(x) - (\nu n - 1)L_{n-\nu}(x)$$

صدق می‌کنند. لازم به ذکر است که بگوییم در انتگرال‌گیری عددی به روش گاوسی کم‌ترین خطا هنگامی رخ می‌دهد که نقاط گره‌ای، ریشه‌های چندجمله‌ای‌های متعامد باشند (Cohen, 2012). برای شرح بیشتر فرض

کنید بخواهیم جواب تقریبی $\int_c^d f(x)dx$ را با استفاده از چندجمله‌ای‌های $\{p_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ که در بازه $[a, b]$ متعامند برآورد کنیم. برای این کار باید مراحل زیر را انجام دهیم:

(۱) کران انتگرال‌گیری را با استفاده از تغییر متغیر $x = a + \frac{(u-c)}{(d-c)}(b-a)$ از $[c, d]$ به $[a, b]$ تبدیل

می‌کنیم:

$$\int_c^d f(x)dx = \frac{b-a}{d-c} \int_a^b f\left(a + \frac{b-a}{d-c}(u-c)\right) du$$

اگر انتگرال ناسره بود برای آن یک حد بالا یا پایین چنان در نظر می‌گیریم که خطای برآورد انتگرال از مقدار مشخص $\delta > 0$ کم‌تر شود.

(۲) ریشه‌های چندجمله‌ای $p_n(x)$ را بدست آورده آن‌ها را r_1, r_2, \dots, r_n می‌نامیم.

(۳) وزن‌های نامعلوم w_1, w_2, \dots, w_n را چنان در نظر می‌گیریم که داشته باشیم

$$\frac{b-a}{d-c} \int_a^b f\left(a + \frac{b-a}{d-c}(u-c)\right) du = \frac{b-a}{d-c} \sum_{i=1}^n w_i f\left(a + \frac{b-a}{d-c}(r_i-c)\right) + E$$

(۴) به جای f در مرحله سوم توابع $\{x^m\}_{m=0}^{n-1}$ را قرار می‌دهیم. با این کار جمله‌ی خطای یعنی E حذف می‌شود و داریم

$$\sum_{i=1}^n w_i \left(a + \frac{b-a}{d-c}(r_i-c)\right)^m = \frac{1}{m+1} \left(\frac{d-c}{b-a}\right) \left[\left(a + \frac{b-a}{d-c}(b-c)\right)^{m+1} - \left(a + \frac{b-a}{d-c}(a-c)\right)^{m+1} \right]$$

(۵) با حل دستگاهی که در مرحله چهارم ایجاد می‌شود وزن‌های w_1, w_2, \dots, w_n را می‌یابیم.

(۶) با افزایش یا کاهش n ، مقدار تقریبی انتگرال را تا رسیدن به تقریب مورد نظر به صورت

$$\int_c^d f(x)dx = \frac{b-a}{d-c} \sum_{i=1}^n w_i f\left(a + \frac{b-a}{d-c}(r_i-c)\right)$$

برآورد می‌کنیم.

اگرچه پیاده‌سازی این الگوریتم در عمل ممکن است اما حل دستگاهی که در مرحله چهارم ایجاد شده است سرعت و دقت محاسبات را پایین می‌آورد. بنابراین باید وزن‌های w_1, w_2, \dots, w_n را با روشی ساده‌تر محاسبه کنیم.

قضیه ۴-۳-۲ در روش انتگرال‌گیری گاوس-لاگر وزن‌های w_1, w_2, \dots, w_n از رابطه

$$w_i = \frac{r_i}{(n+1)^2 [L_{n+1}(r_i)]^2}$$

بدست می‌آیند که در آن $L_{n+1}(x)$ چندجمله‌ای لاگر از درجه $n+1$ و r_1, r_2, \dots, r_n ریشه‌های چندجمله‌ای لاگر از درجه n هستند.
 برهان: به (Cohen, 2012) رجوع کنید.^{۳۳}

حال با داشتن وزن‌های W_1, W_2, \dots, W_n به راحتی می‌توانیم انتگرال‌های موجود در رابطه‌های

$$P_1(x_t, v_{1,t}, v_{2,t}; x_T, \ln K) = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln K} f(\phi - i; x_t, v_{1,t}, v_{2,t})}{i\phi S_t e^{(r-q)\tau}} \right) d\phi$$

$$P_2(x_t, v_{1,t}, v_{2,t}; x_T, \ln K) = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln K} f(\phi; x_t, v_{1,t}, v_{2,t})}{i\phi} \right) d\phi$$

را بدون تغییر کران انتگرال‌گیری محاسبه کنیم چرا که چندجمله‌ای‌های لاگر همان‌طور که پیش از این نیز گفتیم در بازه $(0, \infty)$ متعامدند. بنابراین تنها کار باقی‌مانده تخمین پارامترهای مدل است.

۵- تخمین پارامترهای مدل و نتایج پژوهش

در این بخش می‌خواهیم پارامترهای مدل هستون مضاعف راه، با استفاده از داده‌های جدول ۲ تخمین بزنیم. برای انجام این کار از شیوه‌های فراوانی مانند روش نلدر-مید (Nelder and Mead., 1965)، روش حداکثر درست‌نمایی، روش تخمین استوار (Press, et al, 1992) و راهبرد تکامل تفضیلی (Storn and Price., 1997) می‌توان استفاده کرد. اما یکی از متداول‌ترین و در عین حال ساده‌ترین راه‌های واسنجی مدل‌های مالی، روش تابع زیان است که در ادامه به شرح و تبیین آن می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم که قیمت اختیار فروش اروپایی یک شرکت با سررسید T_t و قیمت توافقی K_k در یک بازار سهام برابر $P_{t,k} = P(T_t, K_k)$ باشد که

$$t = 1, 2, \dots, N_T$$

$$k = 1, 2, \dots, N_K$$

(۳۵)

همچنین می‌پنداریم که $P_{t,k}^\Psi = P(T_t, K_k; \Psi_{t,k})$ برابر قیمت این اختیار در مدل هستون مضاعف به ازای پارامترهای

$$\Psi_{t,k} = (\kappa_1^{t,k}, \kappa_2^{t,k}, \theta_1^{t,k}, \theta_2^{t,k}, \sigma_1^{t,k}, \sigma_2^{t,k}, v_1^{t,k}(\cdot), v_2^{t,k}(\cdot), \rho_1^{t,k}, \rho_2^{t,k})$$

باشد. هدف یافتن Ψ یا پارامترهایی است که به ازای آن‌ها تابع زیان به کم‌ترین مقدار خود می‌رسد. این تابع معمولاً به یکی از دو صورت

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N_T} \sum_{k=1}^{N_K} w_{t,k} (P_{t,k} - P_{t,k}^{\Psi})^2, \quad N = N_T \times N_K \quad (36)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N_T} \sum_{k=1}^{N_K} w_{t,k} \left(\frac{P_{t,k} - P_{t,k}^{\Psi}}{P_{t,k}} \right)^2, \quad N = N_T \times N_K$$

تعریف می‌شود (Christoffersen, 2004) که در آن به $w_{t,k}$ پارامتر وزنی می‌گویند. گفتنی‌ست که روش نخست در رابطه (۳۵)، به میانگین توان دوم تفاضل‌ها و دیگری به میانگین نسبی توان دوم تفاضل‌ها مشهور است. نکته درخور درنگ در این روش گزینش مناسب تابع وزن است. بدیهی‌ست که در این زمینه نیز مقاله‌های فراوانی نگاشته شده است و پژوهش‌گران در طی این سال‌ها برای برگزیدن $w_{t,k}$ توابع گوناگونی را پیشنهاد کرده‌اند برای مثال می‌توانید به (Bams, et al, 2009) و (Bakshi, et al, 1999) رجوع کنید. ما در اینجا پارامتر وزنی $w_{t,k}$ را برابر مجذور ضریب حساسیت وگا در مدل بلک-شولز قرار می‌دهیم، یعنی فرض می‌کنیم

$$\sqrt{w_{t,k}} = \mathcal{G}_{t,k} = S_t e^{-qT_t} \sqrt{T_t} \Phi(d_{t,k}) \quad (37)$$

که

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \quad (38)$$

$$d_{tk} = \frac{\ln(S_t/K_k) + (r - q + \sigma_{t,k}^2/2)T_t}{\sigma_{t,k} \sqrt{T_t}}$$

اما به جای استفاده از قیمت‌های اختیار اروپایی بازار و مدل در رابطه (۳۶) از تلاطم ضمنی بازار و مدل یعنی $IV_{t,k}$ و $IV_{t,k}^{\Psi}$ بهره می‌گیریم:

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N_T} \sum_{k=1}^{N_K} w_{t,k} (IV_{t,k} - IV_{t,k}^{\Psi})^2, \quad N = N_T \times N_K \quad (39)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N_T} \sum_{k=1}^{N_K} w_{t,k} \left(\frac{IV_{t,k} - IV_{t,k}^{\Psi}}{IV_{t,k}} \right)^2, \quad N = N_T \times N_K$$

حال پرسشی که پیش می‌آید این است که چگونه می‌توان تلاطم ضمنی مدل‌های مالی را بدست آورد؟ یکی از راه‌های بدست آوردن تلاطم ضمنی مدل‌های مالی آن است که ببینیم به ازای چه مقدار بهینه‌ای از پارامتر σ در مدل بلک-شولز رابطه

$$\left| P_{BC}^{t,k,\hat{\sigma}} - P_{t,k}^{\Psi} \right| < \varepsilon \quad (40)$$

برقرار می‌شود. در این رابطه $P_{BC}^{t,k,\sigma}$ برابر قیمت اختیار فروش اروپایی با سررسید T_t و قیمت توافقی K_k در مدل بلک-شولز است و $10^{-4} < \varepsilon$. برای انجام این کار از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:

(۱) تابعی برای محاسبه قیمت اختیار فروش اروپایی در مدل بلک-شولز می‌نویسیم و خروجی آن را برابر با $P_{BC}^{t,k,\sigma} = P_{BC}^{t,k,\sigma}(S, K_k, r, T_t, \sigma)$ می‌گیریم.

(۲) کم‌ترین و بیش‌ترین مقدار σ را به ترتیب برابر σ_{\min} و σ_{\max} قرار می‌دهیم و با فراخوانی تابع $P_{BC}^{t,k,\sigma}$ مقادیر $\alpha = P_{t,k}^{\Psi} - P_{BC}^{t,k,a}$ و $\beta = P_{t,k}^{\Psi} - P_{BC}^{t,k,b}$ را محاسبه می‌کنیم.

(۳) اگر $\alpha \times \beta > 0$ قرار می‌دهیم $IV_{t,k}^{\Psi} = 0$.

(۴) در غیر این صورت برای ۱ تا n مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

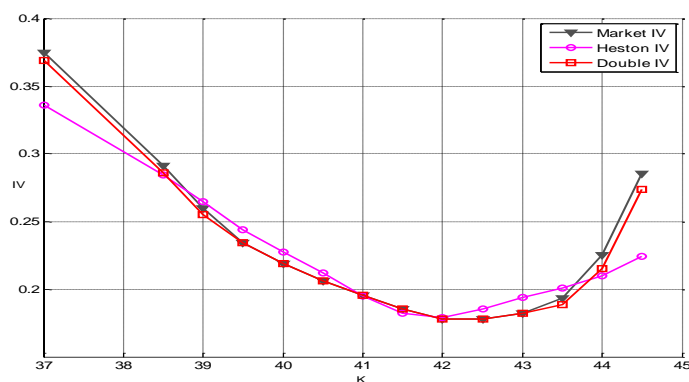
- فرض می‌کنیم $\gamma = \frac{\sigma_{\min} + \sigma_{\max}}{2}$ و $l = |P_{t,k}^{\Psi} - P_{BC}^{t,k,\gamma}|$
- اگر $l < \varepsilon$ از حلقه خارج می‌شویم و قرار می‌دهیم $IV_{t,k}^{\Psi} = \gamma$
- در غیر این اگر $l > 0$ قرار می‌دهیم $\alpha = \gamma$ و به مرحله ۲ می‌رویم و هرگاه $l < 0$ قرار می‌دهیم $\beta = \gamma$ و به مرحله ۲ می‌رویم

با پیاده‌سازی این الگوریتم‌ها در نرم افزار متلب پارامترهای مدل هستون مضاعف به صورت

$$\kappa_1 = 2/3590, \theta_1 = 0/2455, \sigma_1 = 3/7254, v_1(0) = 0/0356, \rho_1 = -0/9036$$

$$\kappa_2 = 0/4560, \theta_2 = 0/1365, \sigma_2 = 3/6576, v_2(0) = 0/03360, \rho_2 = 0/8882$$

تخمین زده می‌شوند. شکل ۵ نشان می‌دهد که مدل هستون مضاعف بهتر از مدل هستون کلاسیک می‌تواند تلاطم ضمنی بازارهای مالی بدون پرش را نشان می‌دهد.



شکل ۵: نمودار تلاطم ضمنی بازار و مدل‌های هستون و هستون مضاعف

۵-۱- نتیجه‌گیری

در این مقاله ابتدا به بررسی مزیت‌ها و نارسایی‌های مدل هستون کلاسیک پرداختیم و دیدیم که در سررسیدهای کوتاه مدت این مدل قادر به هم‌پوشانی کامل تلاطم ضمنی بازارهای مالی نیست. به همین منظور با افزودن فرایند واریانس افزون، به دینامیک دارایی پایه به یک مدل سه‌عاملی رسیدیم که به مدل هستون مضاعف مشهور است. فرایند واریانس افزون، این توانایی را به مدل می‌دهد تا در برابر تغییر شیب‌های تلاطم ضمنی، انعطاف‌پذیری بیشتری از خود نشان دهد. برای اثبات این موضوع از قیمت‌های اختیار فروش اروپایی سهام شرکت مایکروسافت در بازار نزدک استفاده کردیم. اما برای انجام این کار باید پارامترهای مدل را با توجه به داده‌های واقعی تخمین می‌زدیم. این مهم با بکارگیری رهیافت تابع زیان محقق شد. شکل ۵ نشان می‌دهد که مدل هستون مضاعف در سررسیدهای کوتاه مدت کارکرد بهتری نسبت به مدل هستون کلاسیک دارد. پس با توجه به نتایج بدست آمده، پیشنهاد برای کارهای آتی را به سه دسته تقسیم می‌کنیم:

(۱) می‌توانیم نرخ بهره در مدل هستون مضاعف را فرایندی تصادفی در نظر بگیریم. با این فرض به مدلی چهار عاملی مانند

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \sqrt{v_1(t)} S_t dW_1(t) + \sqrt{v_r(t)} S_t dW_r(t) \\ dr_t &= a(b - r_t) + \sigma dW_r^o(t) \\ dv_1(t) &= \kappa_1(\theta_1 - v_1)dt + \sigma_1 \sqrt{v_1(t)} dW_1(t) \\ dv_r(t) &= \kappa_r(\theta_r - v_r)dt + \sigma_r \sqrt{v_r(t)} dW_\Delta(t) \end{aligned}$$

دست می‌یابیم که در آن

$E^Q[dW_i dW_k]$	W_1	W_r	W_Δ	W_Δ	W_Δ
W_1	dt	\cdot	$\rho_{1r} dt$	$\rho_{1\Delta} dt$	\cdot
W_r	\cdot	dt	\cdot	$\rho_{r\Delta} dt$	$\rho_{r\Delta} dt$
W_Δ	$\rho_{1\Delta} dt$	$\rho_{r\Delta} dt$	dt	\cdot	\cdot
W_Δ	$\rho_{1\Delta} dt$	\cdot	\cdot	dt	\cdot
W_Δ	\cdot	$\rho_{r\Delta} dt$	\cdot	\cdot	dt

(۲) می‌توانیم پارامتر وزنی در روش تابع زیان را تغییر دهیم. یعنی به جای استفاده از ضریب حساسیت وگا در مدل بلک-شولز از ضریب حساسیت وگا در مدل هستون استفاده کنیم. با این کار شاید همگرایی روش و دقت نتایج بدست آمده بیشتر شود.

(۳) می‌توانیم تلاطم ضمنی مدل را با استفاده از روش مساله معکوس تخمین بزنیم (Neisy and Salmani, 2013).

فهرست منابع

- * نیسی عبدالساده، چمنی رویا، شجاعی منش لیلی (۱۳۹۱). "سه مدل اساسی در ریاضیات مالی"، مجله مدل‌سازی پیشرفته ریاضی، دوره دوم، شماره ۱.
- * بدری احمد، یزدی محمد، دولو مریم. "گشتاورهای مرتبه بالاتر و معمای نوسان پذیری غیرسیستماتیک"، فصل‌نامه علمی پژوهشی دانش سرمایه‌گذاری، سال سوم، شماره یازدهم، پاییز ۱۳۹۳.
- * Albrecher, H., Mayer, P., Schoutens, W., and Tistaert, J. (2006). "The Little Heston Trap". *Wilmot Magazine*, January 2007, 83-92.
- * Atiya, A.F., and S. Wall (2009). "An Analytic Approximation of the Likelihood Function for the Heston Model Volatility Estimation Problem". *Quantitative Finance*, 9(3):289-96.
- * Attari, M. (2004). "Option Pricing Using Fourier Transforms: A Numerically Efficient Simplification". Working Paper, Charles River Associates, Boston, MA.
- * Bams, D., Lehnert, T., and C.C.P. Wolff. (2009). "Loss Functions in Option Valuation: A Framework for Selection". *Management Science*, 55:853-862.
- * Bakshi, G., Cao, C., and Z. Chen. (1997). "Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models". *Journal of Finance*, 52(5):2033-2049.
- * Bjork, Tomas (2009). "The Arbitrage Theory in continuous time". Oxford.
- * Black, F. and Scholes, M. (1973). "The valuation of options and corporate liability. *Journal of Political Economy*, 81:659-683.
- * Carr, P., and D. Madan. (1999). Option Valuation Using the Fast Fourier Transform. *Journal of Computational Finance*, 2(4):61-73.
- * Chensy, M., Scott, L. (1989). "Pricing European Currency Options: a comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model". *Journal of Financial and Quantitative Analyses*, 24(3):267-284.
- * Christoffersen, P., Heston, S., and K. Jacobs (2009). "The Shape and Term Structure of the Index Option Smirk: Why Multifactor Stochastic Volatility Models Work so Well". *Management Science*, 55: 1914-32.
- * Christoffersen, P., and K. Jacobs. (2004). "The Importance of the Loss Function in Option Valuation". *Journal of Financial Economics*. 72: 291-318.
- * Cohen, H. (2012). "Numerical Approximation Methods". Springer.
- * Cox, J., Ingersoll, J., and Ross, S. (1985). "A Theory of term Structure of Interest Rate". *Econometrica*, Vol. 53, No. 2 385-408.
- * Duffie, D. Pan, J., and K. Singleton. (2000). "Transform Analysis and Asset Pricing for Affine Jump-Diffusions". *Econometrica*, 68:1343-1374.
- * Gatheral, G (2006). "The Volatility Surface: A Practitioner's Guide". Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- * Grzelak, L. Oosterlee, K. (2009). On The Heston Model with Stochastic Interest Rates. Munich Personal RePEc Archive.
- * Hald, A. (1999). "On the history of maximum likelihood in relation to inverse probability and least squares". *Statistical Science* 14 (2): 214-222.
- * Gil-Pelaez, J. (1951). "Note on the Inversion Theorem". *Biometrika*, 33: 481-482
- * Heston, Steven .L (1993) "A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Option". *The Review of Financial Studies*. 6 (2):327-343.

- * Hull, J. C. and White, A. (1987). "The pricing of options on assets with stochastic Volatilities". *Journal of Finance*. 42:281-300.
- * Khal, K. and Jackel, P (2007). "Modeling and Simulating of Stochastic Volatility in Finance". Dissertation, Boca Raton, Florida.
- * Lewis, A.L. (2000). "Option Valuation under Stochastic Volatility: With Mathematica Code". Finance Press.
- * Ludvigsson, G. (2013). "Kolmogorov Equations". Uppsala University. U.U.D.M. Project Report 2013:21
- * Neisy, A., Salmani, K. (2013). "An inverse finance problem for estimation of the volatility". *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 53 (1): 63-77.
- * Nelder, J.A., and R. Mead. (1965). "A Simplex Method for Function Minimization". *The Computer Journal*. 7(4): 308-313.
- * Oksendal. (2002). "Stochastic Differential Equations: An Introduction with Application". Springer Finance series.
- * Press, W. H. Flannery, B. P. Teukolsky, S. A. and Vetterling, W. T. (1992). "Robust Estimation". Cambridge University Press, pp. 157:694-700.
- * Stein, E.M. and Stein, J.C. (1991). "Stock price distribution with stochastic volatility :An analytic approach". *Review of Financial Studies*. 4:727-752.
- * Storn, R., and K. Price. (1997). "Differential Evolution: A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces" *Journal of Global Optimization*. 11: 341-35.
- * Yin, K. (2009). "Case Study Research: Design and Methods". SAGE Publications.

یادداشت‌ها

- ¹ Calibration.
- ² Double Heston.
- ³ Loss function.
- ⁴ Microsoft Corporation.
- ⁵ Smile.
- ⁶ Implied Volatility.
- ⁷ Self-Finance Portfolio.
- ⁸ Arbitrage.
- ⁹ Geometric Wiener Process.
- ¹⁰ Stochastic Differential Equation (SDE).
- ¹¹ Historical Volatility (IV).
- ¹² Stochastic Volatility.
- ¹³ Matlab.
- ¹⁴ Delta-Hedging.
- ¹⁵ Ito's Lemma.
- ¹⁶ The forward Kolmogorov equation
- ¹⁷ Characteristic function.
- ¹⁸ Replicating Portfolio.
- ¹⁹ Capital Asset Pricing Model.
- ²⁰ Limit of the Binomial Method.
- ²¹ Multi-Dimensional Feynman-Kac Theorem
- ²² Affine Term Structure Equation.
- ²³ Maximum Likelihood Estimation.
- ²⁴ Case Study.
- ²⁵ Nasdaq. (<http://www.nasdaq.com>)
- ²⁶ Mean reversion speed

²⁷ Long-run mean

²⁸ C.I.R

²⁹ Indicator Function

³⁰ Adapted

³¹ Deterministic

³² Ricatti

³³ <http://mathworld.wolfram.com/Laguerre-GaussQuadrature.html>.