



## انتخاب استراتژی معاملات جفتی بهینه تحت تغییرات آماری فرایند اسپرد

فاطمه عزیززاده<sup>۱</sup>

نسرین عبادی<sup>۲</sup>

تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۷/۱۵

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۳/۱۰

### چکیده

سرمایه‌گذاری مناسب و تصمیم‌گیری در مورد اتخاذ موقعیت درست خرید یا فروش، نیازمند یک استراتژی مشخص و اثبات شده است. در این پژوهش استراتژی معاملات جفتی مورد بررسی قرار گرفته و یک روش غیرپارامتری جدید بر پایه ترسیمات رنکو و کاگی، که دو اندیکاتور نموداری ژاپنی هستند، برای انجام معاملات ارائه شده است. روش پیشنهادی از اطلاعاتی در مورد تغییرات فرایند اسپرد بهره می‌برد و در آن یک میانگین ثابت بلندمدت برای فرایند اسپرد به دست نمی‌آید اما معامله مانند سایر روش‌های معاملات جفتی انجام می‌شود و تنها فرض مورد نیاز ثابت ماندن خواص آماری تلاطم فرایند اسپرد است. در این پژوهش ابتدا سودآوری روش پیشنهادی برای فرایند بازگشت به میانگین با تلاطم تصادفی به صورت تئوری اثبات شده است، سپس معاملات جفتی بر اساس این رویکرد روی داده‌های منتخب از بازار بورس اوراق بهادار تهران اجرا شده‌اند. نتایج به دست آمده از پیاده‌سازی نشان می‌دهد که در استراتژی مورد استفاده به ازای انتخاب مناسبی از H در جفت سهام ختراک و ختوقا بازده ۵۲/۹۱ درصد و در جفت خمحرکه و خودرو بازده ۳۳/۶۴ درصد به دست می‌آید.

**واژه‌های کلیدی:** آربیتراژ آماری، معاملات جفتی، مدل بازگشت به میانگین، فرایند اورنشتاین-اولنیک، تلاطم تصادفی.

۱- استادیار گروه ریاضیات مالی، دانشکده علوم مالی دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران (نویسنده مسئول) aizzadeh@khu.ac.ir

۲- کارشناسی ارشد گروه ریاضیات مالی، دانشکده علوم مالی دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران.

## ۱- مقدمه

با توجه به جایگاه و اهمیت بازارهای مالی، برای بدست آوردن سود در یک بازار مالی باید یک رویکرد سرمایه‌گذاری مناسب انتخاب شود. در این مقاله رویکرد تکنیکال و استراتژی معاملات جفتی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

معاملات جفتی نوعی استراتژی تحلیل تکنیکال شناخته شده از سال ۱۹۹۰ میلادی است و در میان سرمایه‌گذاران فردی و نهادی رواج دارد. این استراتژی بازار خنثی است و ایده کلی آن اینست: (۱) پیدا کردن دو سهم که قیمت‌هایشان در گذشته با هم، هم‌حرکت بوده‌اند (۲) با واگرایی قیمت‌ها معامله‌گر می‌تواند یک موقعیت فروش روی سهم بیش ارزشگذاری شده و یک موقعیت خرید روی سهم کم ارزشگذاری شده بگیرد؛ (۳) انتظار برای همگرایی فرایندهای قیمت. در این هنگام معامله‌گر با بستن موقعیت‌های معاملاتی سود کسب می‌کند. در این استراتژی، معامله‌گر به جای تمرکز روی روند هر یک از دارایی‌ها بر عملکرد نسبی آن‌ها متمرکز می‌شود. یک راه برای بیان عملکرد نسبی جفت قیمت‌ها استفاده از فرایند اسپرد است که عموماً به صورت تفاضل توابعی از قیمت دو دارایی در نظر گرفته می‌شود و معمولاً فرض می‌شود که از یک مدل اورنشتاین-اولنبرگ تبعیت می‌کند.

هفت رویکرد در ارتباط با معاملات جفتی در ادبیات پیشین وجود دارد [7]: رویکرد فاصله‌ای، رویکرد هم‌انباشتگی، رویکرد تصادفی، رویکرد کنترل تصادفی، رویکرد پیش‌بینی‌های ترکیبی و یادگیری ماشین، رویکرد کاپیولا و رویکرد تحلیل مؤلفه‌های اصلی.

هر روش معاملات جفتی شامل قواعدی برای تشکیل جفت‌ها و معامله است. با وجود برخی تفاوت‌ها، همه‌ی روش‌ها براساس همان ایده‌ی قیمت (یا بازده) تعادلی هستند و انتظار می‌رود اگر فرایند اسپرد از میانگین بلندمدت خود منحرف شود، به میانگین خود برگردد. اگرچه در واقعیت این بازگشت همیشه اتفاق نمی‌افتد و پارامترهای فرایند اسپرد، ممکن است به طرز چشم‌گیری تغییر کند. در نتیجه استراتژی معاملات جفتی تنها براساس ایده بازگشت به حالت تعادل ممکن است سودآور نباشد. آزمایش‌های موجود روی داده‌های بازار این دیدگاه را تأیید می‌کند [2].

بگملف<sup>۱</sup> [1] یک روش غیرپارامتری جدید معاملات جفتی را که براساس برخی ویژگی‌های آماری فرایند اسپرد است، مطرح کرد. او سودآوری این روش را برای فرایند اورنشتاین-اولنبرگ با تلاطم ثابت، به صورت تئوری نشان داد و ابزاری که برای اندازه‌گیری تغییرات فرایند اسپرد استفاده کرد براساس ترسیم‌های رنکو و کاگی بود که توسط پاستوخف در سال ۲۰۰۵ مطرح شد و یک پایه ریاضیاتی را برای این روش‌های تحلیل تکنیکالی ارائه داد.

ما در این مقاله از روش بگمفل استفاده می‌کنیم اما با این فرض که فرایند اسپرید دو دارایی مرتبط از یک فرایند بازگشت به میانگین با تلاطم تصادفی تبعیت می‌کند. بنابراین برای انجام معاملات جفتی با این روش و بررسی قابل اجرا بودن و سودآوری آن روی مدل پیشنهادی، لازم است که ابتدا قضایا و لم‌هایی را اثبات کنیم. پس از اثبات تئوری عملی بودن روش، انتخاب دیگری برای پارامتر  $H$  مطرح می‌کنیم و با نتایج عددی مناسب بودن این انتخاب را مورد آزمون قرار می‌دهیم.

## ۲- روش‌شناسی پژوهش

### • ترسیم رنکو

فرض کنید  $P(t)$  یک سری زمانی از قیمت دارایی واقعی یا بازده‌های تجمعی دارایی روی بازه‌ی زمانی  $[0, T]$  و در این مرحله پیوسته باشد و  $\{\tau_i\}_{i=0}^N$ ، یک دنباله از زمان‌های تصادفی باشد بطوریکه برای هر  $H > 0$  دلخواه،

$$H \leq \max_{t \in [0, t]} P(t) - \min_{t \in [0, T]} P(t), \quad (1)$$

و برای  $P(\tau_0) = P(0)$ ،  $\tau_0 = 0$

$$\tau_i = \inf \{u \in [\tau_{i-1}, T] : |P(u) - P(\tau_{i-1})| = H\}. \quad (2)$$

فرایند  $\{X(i) : X(i) = P(\tau_i)\}$ ،  $i = 0, 1, \dots, N$ ، یک فرایند رنکو است.  $\{(\tau_n^a, \tau_n^b), n = 0, 1, \dots, M\}$  را براساس  $\{\tau_i\}$  ایجاد می‌کنیم. قرار می‌دهیم  $\tau_0^a = \tau_0$  و  $\tau_0^b = \tau_1$ ، آنگاه

$$\tau_n^b = \min \{ \tau_i > \tau_{n-1}^b : (P(\tau_i) - P(\tau_{i-1}))(P(\tau_{i-1}) - P(\tau_{i-2})) < 0 \}, \quad (3)$$

$$\tau_n^a = \{ \tau_{i-1} : \tau_n^b = \tau_i \}. \quad (4)$$

### • ترسیم کاگی

در ترسیم کاگی برای ایجاد دنباله  $\{(\tau_n^a, \tau_n^b), n = 0, 1, \dots, M\}$  از ماکزیمم یا مینیمم موضعی واقعی فرایند  $P(t)$  استفاده می‌شود. برای هر  $H > 0$  دلخواه که در (۱) صدق می‌کند تعریف می‌کنیم:

$$\tau_0^b = \inf \left\{ u \in [0, T] : \max_{t \in [0, u]} P(t) - \min_{t \in [0, u]} P(t) = H \right\} \quad (5)$$

$$\tau_0^a = \inf \left\{ u < \tau_0^b : |P(u) - P(\tau_0^b)| = H \right\}. \quad (6)$$

اگر در زمان  $\tau_0^a$  یک ماکزیمم موضعی داشته باشیم، آنگاه  $(\tau_n^a, \tau_n^b)$ ،  $n = 1, 3, 5, 7, \dots$ ، مربوط به مینیمم‌های موضعی می‌شود و باید به صورت زیر تعریف شوند:

$$\begin{aligned} \tau_n^b &= \inf \left\{ u \in [\tau_{n-1}^a, T] : P(u) - \min_{t \in [\tau_{n-1}^a, u]} P(t) = H \right\}, \\ \tau_n^a &= \inf \left\{ u < \tau_n^b : P(u) = \min_{t \in [\tau_{n-1}^a, \tau_n^b]} P(t) \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

و  $(\tau_n^a, \tau_n^b)$ ،  $n = 2, 4, 6, \dots$ ، مربوط به ماکزیمم‌های موضعی می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau_n^b &= \inf \left\{ u \in [\tau_{n-1}^a, T] : \max_{t \in [\tau_{n-1}^a, u]} P(t) - P(u) = H \right\}, \\ \tau_n^a &= \inf \left\{ u < \tau_n^b : P(u) = \max_{t \in [\tau_{n-1}^a, \tau_n^b]} P(t) \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

ترسیم دنباله کامل  $\{(\tau_n^a, \tau_n^b), n = 1, 2, 3, \dots, N\}$  با گام‌های متناوب به روش استقرائی انجام می‌شود.

#### • برخی از ویژگی‌های ترسیم رنکو و گاک

در ادامه از اصطلاح H-ترسیم به جای ترسیم رنکو یا ترسیم گاک در صورتی که ویژگی‌هایشان مشابه باشد، استفاده می‌کنیم و فرض می‌کنیم فرایند  $P(t)$  که  $t \in [0, T]$ ، پیوسته و روی فضای احتمال  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  تعریف شده باشد. برای هر  $H$  دلخواه، دنباله  $\{(\tau_n^a, \tau_n^b), n = 1, 2, 3, \dots, N\}$  را در نظر می‌گیریم. واضح است که  $\tau_n^b$  ها زمان توقف است. برای سادگی در محاسبات، فرض می‌کنیم برای هر  $N$  دلخواه،  $T = \tau_N^b$  است. حال متغیرهای مورد نیاز را بیان می‌کنیم.

#### H-وارونگی:

$$N_T = \max \{n : \tau_n^b = T\} = N \quad (9)$$

H- تلاطم از مرتبه P:

$$\xi_T^P(H, P) = \frac{\sum_{n=1}^N |P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)|^P}{N_T(H, P)} \quad (10)$$

برای هدف این تحقیق کفایت H-تلاطم را از مرتبه 1 در نظر بگیریم. پاستوخف [6] نشان داد که برای فرایند وینر  $\{W(t)\}$ ، شرط  $\xi_T(H, W) = 2H$ ، برای هر مقدار H، برقرار است.

• استراتژی‌های معاملاتی

دو H-استراتژی مومنتوم و معکوس وجود دارد. [1]

سود به دست آمده از زمان  $\tau_{n-1}^b$  تا  $\tau_n^b$  برای H-استراتژی مومنتوم برابر است با

$$Y_{\tau_n^b} = (P(\tau_n^b) - P(\tau_{n-1}^b)) \cdot \text{sign}(P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)), \quad (11)$$

و سود کل از زمان 0 تا T مربوط به H-استراتژی مومنتوم برای فرایند  $P(t)$  برابر است با

$$Y_T(H, P) = (\xi_T(H, P) - 2H) \cdot N_T(H, P). \quad (12)$$

سود به دست آمده از زمان  $\tau_{n-1}^b$  تا  $\tau_n^b$  برای H-استراتژی معکوس برابر است با (11) اما با علامت منفی

$$Y_{\tau_n^b} = (P(\tau_n^b) - P(\tau_{n-1}^b)) \cdot \text{sign}(P(\tau_{n-1}^a) - P(\tau_n^a)), \quad (13)$$

و سود کل تا لحظه T برابر است با

$$Y_T(H, P) = (2H - \xi_T(H, P)) \cdot N_T(H, P). \quad (14)$$

در این مرحله فرض می‌شود سرمایه‌گذار بدون محدودیت می‌تواند اقدام به خرید و فروش کند و هزینه‌های معاملاتی صفر است. اگر  $\xi_T(H, P) > 2H$  باشد، آنگاه سرمایه‌گذار برای به دست آوردن سود مثبت باید از H-استراتژی مومنتوم و اگر  $\xi_T(H, P) < 2H$  باشد باید از H-استراتژی معکوس استفاده کند. این حقیقت شامل یک ایده است: اگر فرایند وینر مربوط به حالت

بدون آربیتراژ باشد، آنگاه هرگونه اختلاف از  $2H$  وجود آربیتراژ را برای فرایند  $P(t)$  نشان می‌دهد. البته شرط H-تلاطم کمتر از  $2H$  یک ویژگی آماری از فرایند  $P(t)$  است و نیازی نیست فرایند  $P(t)$  در تعریف رسمی بازگشت به میانگین باشد و میانگین و واریانس ثابت داشته باشد.

• ویژگی‌های H-ترسیم روی فرایند بازگشت به میانگین با تلاطم تصادفی

H-ترسیم‌های ایجاد شده را روی فرایند بازگشت به میانگین با تلاطم تصادفی در نظر می‌گیریم:

$$dX_t = -\rho(X_t - \mu)dt + \sigma X_t dB_t \quad (15)$$

که در آن  $\{B_t : t \geq 0\}$  یک حرکت براونی استاندارد است و  $\rho > 0$ ،  $\sigma > 0$  و  $\mu \geq 0$  ثابت هستند. بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض می‌کنیم  $\mu = 0$  و  $\sigma = 1$  (با استفاده از  $X_t - \mu$  به جای  $X_t$  و مقیاس‌بندی زمانی). آنگاه، (۲۳) به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$dX_t = -\rho X_t dt + X_t dB_t \quad (16)$$

اگر در یک بازه زمانی متناهی قرار دهیم  $H = \max P(t) - \min P(t)$  آنگاه مینیمم و ماکزیمم موضعی در رابطه (۵) همان مینیمم و ماکزیمم مطلق سری‌های زمانی است. در نتیجه قاعده ایجاد ترسیم کاگی در رابطه (۵) فقط یکبار می‌تواند صدق کند و قاعده ایجاد رنکو هرگز صدق نکند. بنابراین، حداکثر یک نوسان بین ماکزیمم و مینیمم داریم، در نتیجه  $\xi_T(H, P) = H$ .

قضیه زیر یک توجیه تئوری برای کران بالای H-تلاطم فرایند معرفی شده با رابطه (۱۵) است. قضیه- فرض کنید  $P$  یک فرایند بازگشت به میانگین باشد که با رابطه (۱۵) تعریف شده است. آنگاه برای هر  $H$  مثبت که در (۱) صدق می‌کند، H-تلاطم کم‌تر از  $2H$  است. یا بعبارتی

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \xi_T(H, P) < 2H \quad (17)$$

اثبات: اثبات در پیوست ارائه شده است.

بنابراین برای این فرایند،

$$\frac{\xi_T(H, P)}{H} \in [1, 2). \quad (18)$$

### • فرایند GARCH(1,1)

بیشتر داده‌های مالی گسسته است. از اینرو خواص H-ترسیم روی فرایند گسسته مهم است. فرایند GARCH(1,1)، حالت گسسته فرایند معرفی شده در رابطه (۱۵) است:

$$Y(t) = \alpha Y(t-1) + \sigma(t) X(t).$$

$$\sigma^2(t) = \beta Y^2(t-1) + \gamma \sigma^2(t-1)$$

که در آن  $\alpha \in [0,1)$ ،  $\beta, \gamma \geq 0$ ،  $\beta + \gamma < 1$  و  $\{X(t)\}$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع است که دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\sigma^2$  هستند. فرایند GARCH(1,1) پیوسته نیست و همان مشکلات فرایندهای AR(1) و گام تصادفی مطرح شده در [1] را دارد:

$$P(|Y(t) - Y(t+n)| = H) = 0, \quad \forall n, t \geq 0.$$

در نتیجه در هر زمان توقف یک فرارفت داریم:

$$|Y(\tau_n^a) - Y(\tau_n^b)| = \tilde{H}_n \geq H \quad (19)$$

که در آن  $\tilde{H}_n$  یک متغیر تصادفی مستقل است. در نتیجه نسبت H-تلاطم به پارامتر H متورم می‌شود:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \xi_T(H, P) = 2E[\tilde{H}_n] \geq 2H.$$

بنابراین احتمال مشاهده فرایند بازگشت به میانگین گسسته با  $\xi_T(H, Y) \geq 2H$  وجود دارد و این با قضیه اصلی در تناقض است. مقدار صحیح نسبت H-تلاطم به پارامتر H برابر است با

$$R(H, P) = \frac{\xi(H, P)}{E[\tilde{H}_n(H, P)]} = \frac{\xi(H, P)}{(1/N) \sum_{n=1}^N |P(\tau_n^a) - P(\tau_n^b)|} \in [1, 2) \quad (20)$$

H-استراتژی رنکو بیش‌تر تحت تأثیر فرارفت است، زیرا باید فرایند رنکو را تولید کند. به همین دلیل ما آزمایش را فقط با H-استراتژی کاگی انجام می‌دهیم. هر چند، فرارفت همیشه بد نیست و ممکن است سودآوری استراتژی معاملاتی معکوس را بهبود بخشد.

### • مجموعه داده‌ها

در این پژوهش از قیمت‌های بسته‌شدن روزانه سهام بورس اوراق بهادار تهران برای آزمایش H- استراتژی معاملاتی جفتی استفاده شده است. داده‌ها از نرم‌افزار TSE Client استخراج شده است. مجموعه داده‌ها شامل داده‌های روزانه از دی‌ماه سال ۱۳۹۲ تا انتهای اسفندماه سال ۱۳۹۴ می‌باشد. طبق شیوه آزمایش گیتو و همکاران (۲۰۰۶)، از داده‌های ۱۲ ماه اخیر برای کالیبره کردن سیستم و ایجاد جفت استفاده می‌شود و در ۶ ماه بعدی جفت‌های انتخاب شده معامله می‌شود. در این پژوهش فرض ما بر این است که در ابتدای دوره معاملاتی هیچ موجودی از سهام در اختیار نداریم. بنابراین استراتژی معاملاتی جفتی بدون در نظر گرفتن فروش استقراضی اجرا می‌شود. به این صورت که اگر سهمی در سیگنال نخست موقعیت فروش داشته باشد، آن موقعیت را در نظر نمی‌گیریم و در سیگنال معاملاتی بعدی اقدام به خرید خواهد شد.

### • سهام پیش‌انتخابی

داده‌ها از شرکت‌های صنعت خودرو انتخاب شدند. هرچند برای انتخاب جفت سهام محدودیتی برای در یک صنعت بودن جفت سهام وجود ندارد.

### ۳- پرسش‌های پژوهش

برای استفاده از استراتژی معاملاتی جفتی همواره سه سؤال اصلی مطرح است که عبارتند از: چگونه باید این جفت سهام انتخاب شوند؟ مدل مناسب برای اسپرد قیمتی چیست؟ زمان‌های بهینه انجام معامله کدام است؟

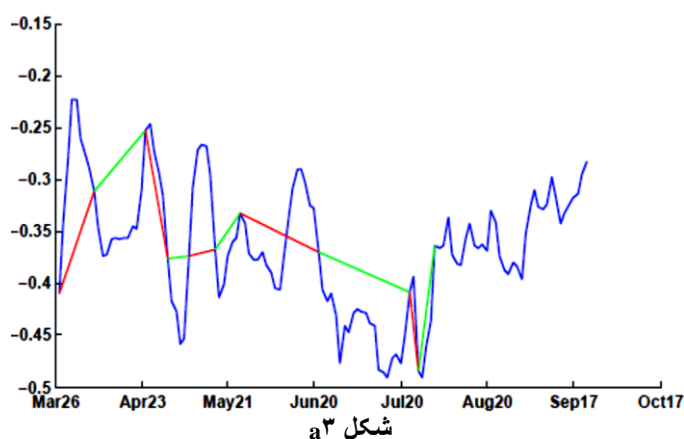
### ۴- یافته‌های پژوهش

در این بخش تشکیل جفت‌ها و قواعد معاملات مشابه [1] می‌باشد. در جفت‌های انتخاب شده فرایند اسپرد نباید تغییر علامت دهد. از مجموعه سهام پیش‌انتخابی دو جفت ختراک (ریخته‌گری تراکتورسازی ایران) و ختوقا (قطعات اتومبیل ایران)، خمحرکه (نیرو محرکه) و خودرو (ایران خودرو) انتخاب شد. دوره معامله برای جفت سهام ختراک و ختوقا از تاریخ ۹۳/۱۰/۱ تا ۹۴/۳/۳۱ و برای جفت خمحرکه و خودرو از ۹۵/۱/۱ تا ۹۵/۶/۳۱ می‌باشد.

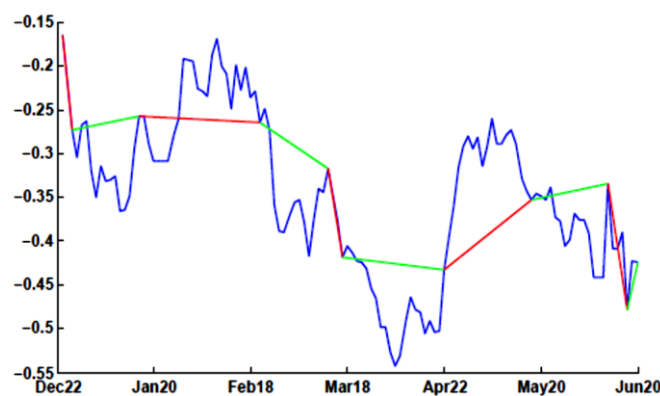


(۱) معاملات جفتی تحت H-استراتژی معکوس کاگی در حالت  $H = \sigma$

در این H-استراتژی در دوره معامله طبق (بگملف، ۲۰۱۳)، H را برابر انحراف معیار اسپرد در دوره تشکیل قرار دادیم و معاملات، مشابه قواعد مطرح شده در [1] برای اسپرد مربوط به دو جفت منتخب انجام شد.



شکل 3a

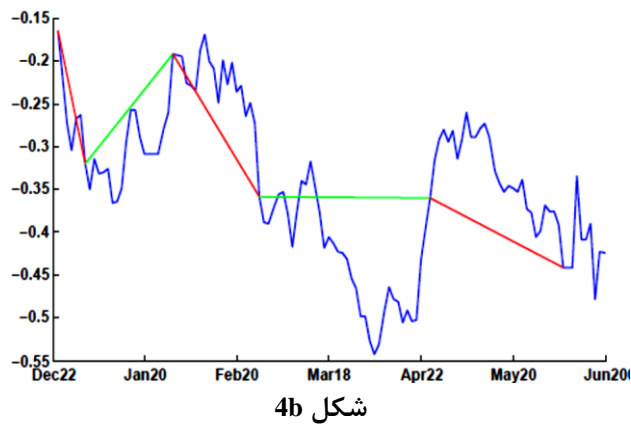
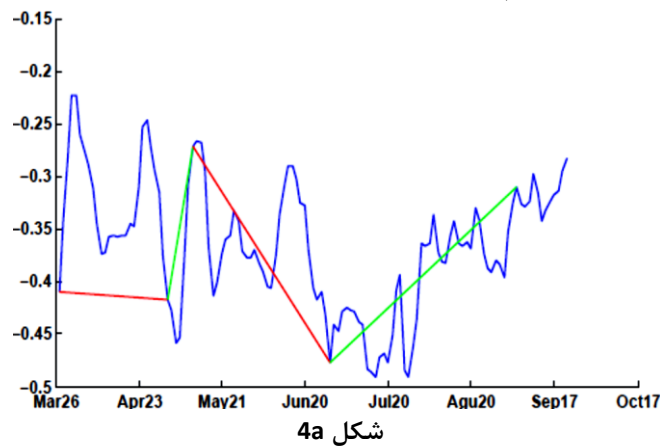


شکل 3b

شکل 3a فرایند اسپرد لگاریتم قیمتی دوره معاملاتی جفت خمحرکه و خودرو برای حالت  $H = \sigma$  و شکل 3b فرایند اسپرد لگاریتم قیمتی دوره معاملاتی جفت ختراک و ختوقا برای حالت  $H = \sigma$ . خطوط قرمز نشان دهنده موقعیت فروش و خطوط سبز نشان دهنده موقعیت خرید است.

## ۲) معاملات جفتی تحت H-استراتژی معکوس کاگی در حالت H=H-تلاطم

در این H-استراتژی، H را برابر H-تلاطم اسپرد در دوره تشکیل که در واقع متوسط مقدار فواصل بین اکس‌تریم‌های موضعی است قرار دادیم و معاملات، مشابه قواعد مطرح شده در [1] برای اسپرد مربوط به دو جفت منتخب انجام شد.



شکل 4a فرایند اسپرد لگاریتم قیمتی دوره معاملاتی جفت خم‌کره و خودرو برای حالت H=H-تلاطم می‌باشد. شکل 4b فرایند اسپرد لگاریتم قیمتی دوره معاملاتی جفت ختراک و ختوقا برای حالت H=H-تلاطم. خطوط قرمز نشان دهنده موقعیت فروش و خطوط سبز نشان دهنده موقعیت خرید است.

## • نتایج پیاده‌سازی

در این بخش نتایج حاصل از معاملات جفتی تحت H-استراتژی‌های معکوس کاگی را برای H‌های انتخابی بررسی کردیم. یافته‌های پژوهش حاکی از اینست که H-استراتژی که در آن مقدار H برابر H-تلاطم اسپرد در دوره تشکیل است سود بیشتری را نسبت به H-استراتژی که در آن مقدار H برابر  $\sigma$  بود، ایجاد کرده است.

H انتخابی	سود H-استراتژی برای جفت ختراک و ختوقا	سود H-استراتژی برای جفت خمحرکه و خوردو
انحراف معیار دوره تشکیل	۲۷/۱	۳۰/۷
H-تلاطم اسپرد در دوره تشکیل	۵۲/۹۱	۲۳/۶۴

## ۵- نتیجه‌گیری و بحث

سرمایه‌گذاری مناسب در شرایط نابسامان اقتصادی و تحریم، اهمیتی دو چندان پیدا می‌کند. در بازارهای مالی معامله‌گرانی که تنها با تعقیب روندهای کوتاه‌مدت در نمودارهای قیمت اقدام به معامله می‌کنند ممکن است به جای کسب سود و استفاده از فرصت‌های بازار در موقعیت ضرر قرار گیرند، بنابراین برای تصمیم‌گیری در مورد اتخاذ موقعیت خرید یا فروش نیازمند یک استراتژی مشخص و اثبات شده هستند.

این پژوهش یک رویکرد را براساس تلاطم فرایند اسپرد برای معاملات جفتی ارائه می‌دهد. تازگی این رویکرد، در انعطاف‌پذیری و محدودیت‌های کم‌تر آن در مقایسه با روش‌های موجود دیگر است. در این مقاله انتظار نداریم فرایند اسپرد که بازگشت به میانگین در نظر گرفته می‌شود، در تعریف رسمی خود میانگین، واریانس و ضریب بازگشت به میانگین ثابت داشته باشد. از آنجا که این رویکرد یک روش غیر پارامتری است مشکلات احتمالی اشتباه در برآورد پارامتر را ندارد. H-ترسیم‌ها یک روش بسیار مؤثر برای اندازه‌گیری تغییرات فرایند هستند و می‌توان آنها را بر اساس استراتژی معاملات جفتی به طور موفقیت‌آمیزی به کار برد.

در این مقاله علاوه بر در نظر گرفتن تلاطم تصادفی برای فرایند اسپرد، پیشنهادی هم برای انتخاب مقدار برای پارامتر H ارائه شد. نتایج پیاده‌سازی بر روی داده‌های واقعی بازار نشان داد که H-استراتژی با H پیشنهادی (H-تلاطم دوره تشکیل) سود بیشتری را نسبت به H-استراتژی در حالی که H برابر انحراف معیار دوره تشکیل است، ایجاد می‌کند.

## ۶- فهرست منابع

- \* Bogomolov, T., Pairs trading based on statistical variability of the spread process, *Quantitative Finance*, 2013, 13(9): 1411-1430.
- \* Do, B., Faff, R., Does simple pairs trading still work? *Financ. Anal. J.*, 2010, 66: 83-95.
- \* Escobar, M., Friederich, T., Krayzler, M., Seco, L., Zagst, R., Structural Credit Modeling Under Stochastic Volatility, *International Journal of Statistics and Probability*, 2012, 1(1).
- \* Genon-Catalot, V., Jeantheau, T., Laredo, C., Stochastic volatility models as hidden Markov models and statistical applications, *Bernoulli*, 2000, 6(6): 1051-1079.
- \* Krauss, C., Statistical Arbitrage Pairs Trading Strategies: Review and Outlook, 2015, available at: <http://hdl.handle.net/10419/116783>
- \* Pastukhov, S.V., On some probabilistic-statistical methods in technical analysis, *Theory Probab. Applic*, 2005, 49: 245-260.
- \* Swishchuk, A., Change of Time Method in Mathematical Finance, *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, 2007, 15 (3).
- \* Van der Hoek, J., Recombining binomial tree approximations for diffusions. In *Special Volume: Mathematical Modeling and Numerical Methods in Finance*, edited by Ciarlet, P., vol. 15 of *Handbook of Numerical Analysis*, 2009: 361-368

## پیوست:

قبل از اثبات قضیه اصلی چند لم را اثبات می‌کنیم.

لم ۱- فرض کنید  $\{Y_t\}$  یک فرایند معرفی شده با رابطه (A1) با میانگین صفر، واریانس یک و  $\lambda > 0$  روی بازه زمانی  $[0, T]$  باشد

$$dY_t = -\lambda Y_t dt + \sigma Y_t dB_t \quad (A2)$$

اگر یک H-ترسیم را با توجه به H مناسبی روی فرایند معرفی شده با رابطه (A1) ایجاد کنیم، آنگاه  $N_T(H, Y) \rightarrow \infty$  زمانیکه  $T \rightarrow \infty$ .

برهان- فرض کنیم  $\varepsilon > 0$  و  $Y_0 = -\varepsilon$ . فرایند تعریف شده با رابطه (A1) را به صورت یک حرکت براونی زمان-متغیر در نظر می‌گیریم [7] و احتمال اینکه  $P(Y_t > \varepsilon)$  را می‌یابیم.  $Y_t = e^{-\lambda t} \varepsilon e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}}$  جواب معادله (A2) است.

$$\begin{aligned} P(Y_t > \varepsilon) &= P\left(e^{-\lambda t} \varepsilon e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}} > \varepsilon\right) = P\left(e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2}} > e^{-\lambda t}\right) = P\left(\sigma W(t) - \frac{\sigma^2 t}{2} > \lambda t\right) \\ &= P\left(W(t) > \frac{2\lambda t + \sigma^2 t}{2\lambda}\right) = P\left(\frac{W(t)}{\sqrt{t}} > \frac{2\lambda t + \sigma^2 t}{2\sigma\sqrt{t}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2\lambda t + \sigma^2 t}{2\sigma\sqrt{t}}\right), \end{aligned}$$

که در آن  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2}} du$  و  $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Y_t > \varepsilon) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 - \Phi\left(\frac{2\lambda t - \sigma^2 t}{2\sigma\sqrt{t}}\right) \right) = 1 - \Phi\left(\frac{2\lambda + \sigma^2}{2\sigma}\right) \neq 0$

به طور مشابه می‌توانیم نشان دهیم احتمال اینکه فرایند معرفی شده با رابطه (A1) با مقدار ابتدایی  $\varepsilon$  کم‌تر از  $-\varepsilon$  باشد، مساوی صفر نیست. بنابراین فرایند معرفی شده با رابطه (A1) هرگز به طور کامل به میانگین خود همگرا نمی‌شود و بین  $\varepsilon$  و  $-\varepsilon$  نوسان می‌کند. اگر قرار دهیم  $H \leq 2\varepsilon$  داریم:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} N_T(H, P) = \infty \quad (\text{a.s.})$$

لم ۲- احتمال حدی تقریب دو جمله‌ای بازترکیبی فرایند معرفی شده با رابطه (A1)  $\{y_n\}$  روی سطح  $m$  در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$Q(m) > Q(0) e^{-m(2\lambda+1)}$$

که در آن

$$Q(0) > \left( 1 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m(2\lambda+1)} \right)^{-1}$$

برهان- فرض کنید  $\{x_t\}$  فرایند معرفی شده با رابطه (A1) و با میانگین صفر و  $\rho > 0$  باشد:

$$dx_t = -\rho x_t dt + \sigma x_t dB_t,$$

و فرض کنید  $\{y_n\}$  یک تقریب درخت دو جمله‌ای بازترکیبی از فرایند معرفی شده با رابطه (A1)  $\{x_n\}$

باشد. احتمال حرکت به سمت بالا از حالت  $y_n$  برابر است با: [8]

$$P^\uparrow(y_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ \left( -\frac{\rho}{\sigma} - \frac{1}{2} \sigma \right) \sqrt{\Delta t} \right], \quad (\text{A3})$$

$$H = \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (\text{A4})$$

و اندازه گام به بالا یا پایین:

می‌باشد. اگر قرار دهیم  $\Delta t = 1$ ،  $\rho = \lambda$  و  $\sigma = 1$ ، آنگاه اندازه حرکت به سمت بالا یا پایین مساوی ۱ است

و فرایند  $\{y_n\}$  مقادیر صحیح را می‌گیرد ( $y_n = m$ )،  $m \in [-n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n]$ . احتمال حرکت به سمت بالا از سطح  $m$  برابر است با

$$P^\uparrow(m) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ -\left( \frac{2\lambda+1}{2} \right) \right] \quad (\text{A5})$$

ما به احتمال حدی  $Q(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(y_n = m)$  علاقه‌مندیم.  $P^\uparrow(m)$  و  $P^\uparrow(m)$  احتمال حرکت به

سمت بالا و پایین از سطح  $m$  است. فرایند  $\{y_n\}$  دارای توزیع لگ نرمال است. بنابراین

$$Q(0) = P^\downarrow(1)Q(1) + P^\uparrow(-1)Q(-1) = P^\downarrow(1)Q(1) \quad (\text{A6})$$

با روش مشابه و قرار دادن  $P^\uparrow(0) < 1$  داریم

$$Q(1) = P^\downarrow(2)Q(2) + P^\uparrow(0)Q(0) = P^\downarrow(2)Q(2) + P^\uparrow(0)P^\downarrow(1)Q(1) < P^\downarrow(2)Q(2) + P^\downarrow(1)Q(1)$$

$$\Rightarrow Q(1) \underbrace{(1 - P^\downarrow(1))}_{P^\uparrow(1)} < P^\downarrow(2)Q(2) \Rightarrow Q(2) > Q(1) \frac{P^\uparrow(1)}{P^\downarrow(2)}.$$

اگر همین روش برای سطح  $m=2$  و سطوح بعدی به کار برده شود، می توان یک رابطه ی برگشتی برای احتمال حدی در سطح  $m$  بودن، به دست آورد:

$$Q(m) > Q(m-1) \frac{P^\uparrow(m-1)}{P^\downarrow(m)} \quad (A7)$$

برای اثبات ادعای (A7) در حالت کلی، فرض می کنیم که (A7) برای هر  $m \leq k$  درست است و آن را برای  $m = k+1$  بررسی می کنیم. واضح است که احتمال روی سطح  $k$  بودن برابر است با

$$Q(k) = Q(k-1)P^\uparrow(k-1) + Q(k+1)P^\downarrow(k+1)$$

با استفاده از فرمول (A7) به دست می آوریم

$$Q(k) > Q(k-1) \frac{P^\uparrow(k-1)}{P^\downarrow(k)} \Rightarrow Q(k-1)P^\uparrow(k-1) < Q(k)P^\downarrow(k)$$

بنابراین

$$Q(k) < Q(k)P^\downarrow(k) + Q(k+1)P^\downarrow(k+1) \Rightarrow Q(k)[1 - P^\downarrow(k)] < Q(k+1)P^\downarrow(k+1)$$

$$\Rightarrow Q(k)P^\uparrow(k) < Q(k+1)P^\downarrow(k+1) \Rightarrow Q(k+1) > Q(k) \frac{P^\uparrow(k)}{P^\downarrow(k+1)}.$$

پس ادعای (A7) برای  $m = k+1$  درست است و می توانیم طبق اصول استقرای ریاضی نتیجه بگیریم که

$$Q(m) > Q(0) \prod_{j=0}^{m-1} \frac{P^\uparrow(j)}{P^\downarrow(j+1)} : m > 0 \text{ بنابراین برای } m \text{ برقرار است.}$$

احتمال حرکت به سمت بالا و پایین را می دانیم:

$$\prod_{j=0}^{m-1} \frac{P^\uparrow(j)}{P^\downarrow(j+1)} = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{\frac{1}{2} + \tanh\left(-\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh\left(-\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)\right)} = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1 + \left[\frac{e^{-(2\lambda+1)} - 1}{e^{-(2\lambda+1)} + 1}\right]}{1 - \left[\frac{e^{-(2\lambda+1)} - 1}{e^{-(2\lambda+1)} + 1}\right]} = \prod_{j=0}^{m-1} e^{-(2\lambda+1)} = e^{-m(2\lambda+1)}.$$

در نتیجه

$$Q(0) = 1 - (Q(1) + Q(2) + Q(3) + \dots) > 1 - Q(0) \sum_{i=1}^{\infty} \left( \prod_{j=0}^{i-1} \frac{P^\uparrow(j)}{P^\downarrow(j+1)} \right) = 1 - Q(0) \sum_{i=1}^{\infty} e^{-i(2\lambda+1)}$$

$$\Rightarrow Q(0) > \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(2\lambda+1)}}.$$

تذکر: اگر یک حالت کلی تر را با مقدار دلخواه گام به بالا یا پایین  $H$  در نظر بگیریم، به عبارت دیگر یک نمودار کلاسیک رنکو، برای به دست آوردن تقریب درخت دو جمله‌ای باز ترکیبی، مقدار  $\Delta t$  برابر است با:

$$\Delta t = \left(\frac{H}{\sigma}\right)^2.$$

می‌توان  $\Delta t$  را مساوی ۱ قرار داد و از نمونه‌های واحد استفاده کرد و ضریب بازگشت به میانگین را مقیاس-

$$\lambda = \rho \frac{H}{\sigma} \quad \text{بندی کرد:}$$

حال به اثبات قضیه  $H$ -تلاطم فرایند معرفی شده با رابطه (A1) می‌پردازیم.

برهان قضیه- فرض کنید  $\{(\tau_n^a, \tau_n^b), n = 0, 1, \dots, N\}$  یک دنباله زمانی تعریف شده روی فرایند

معرفی شده با رابطه (A1) باشد. طبق لم ۱ داریم:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} [N = N_T(H, P)] = \infty \quad (\text{تقریباً همه جا}) \quad (A8)$$

$$\begin{aligned} c_n &= |P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)| = (P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)) \cdot \text{sign}(P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)) \\ &= (P(\tau_n^a) - P(\tau_n^b) + P(\tau_n^b) - P(\tau_{n-1}^a) + P(\tau_{n-1}^b) - P(\tau_{n-1}^b)) \cdot \text{sign}(P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)) \\ &= [(P(\tau_n^a) - P(\tau_n^b)) - (P(\tau_{n-1}^a) - P(\tau_{n-1}^b)) + (P(\tau_{n-1}^b) - P(\tau_{n-1}^a))] \cdot \text{sign}(P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)). \end{aligned}$$

فاصله بین  $P(\tau_n^b)$  و  $P(\tau_{n-1}^a)$  برابر  $H$  است. دو حالت وجود دارد:

۱) اگر  $P(\tau_{n-1}^a)$  یک ماکزیمم موضعی باشد و  $P(\tau_{n-1}^a)$  یک مینیمم موضعی، آنگاه

$$[(P(\tau_n^a) - P(\tau_n^b)) - (P(\tau_{n-1}^a) - P(\tau_{n-1}^b))] \cdot \text{sign}(P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)) = [H - (-H)] \cdot 1 = 2H.$$

۲) اگر  $P(\tau_{n-1}^a)$  یک مینیمم موضعی و  $P(\tau_{n-1}^a)$  یک ماکزیمم موضعی باشد، آنگاه

$$[(P(\tau_n^a) - P(\tau_n^b)) - (P(\tau_{n-1}^a) - P(\tau_{n-1}^b))] \cdot \text{sign}(P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)) = [-H - H] \cdot (-1) = 2H.$$

نتیجه می‌شود

$$c_n = |P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)| = 2H + (P(\tau_n^b) - P(\tau_{n-1}^b)) \cdot \text{sign}(P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)). \quad (A9)$$

مقدار  $\text{sign}(P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a))$  کاملاً توسط فرایند  $\{P(t), t \in [\tau_{n-1}^b, \tau_n^b]\}$  تعریف می‌شود و در

زمان توقف  $\tau_n^b$  معلوم می‌شود، اما  $|P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)|$  مستقل نیست.

اگرچه آن‌ها تقریباً مستقل هستند. دنباله  $\{c_n\}$  ماناست زیرا توزیع بردار تصادفی  $(c_n, c_{n+1}, \dots, c_{n+k})$

وابسته به  $n$  نیست و در شرط آلفا-میکسینگ<sup>۲</sup> صدق می‌کند،  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ . [3,4]. بنابراین طبق قضیه حد

مرکزی برای متغیرهای وابسته داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \xi_T(H, P) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N c_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a)| \\ &\rightarrow E[|P(\tau_1^a) - P(\tau_0^a)|] \quad (\text{a.s.}) \text{ as } T \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (A10)$$

اکنون برهان را برای ترسیم‌های رنکو و کاگی جدا می‌کنیم.

ابتدا رابطه‌ی (۱۷) را برای ترسیم رنکو ثابت می‌کنیم. دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی  $\{d_k : k = 1, 2, \dots\}$  را در نظر می‌گیریم به طوری که

$$d_k = \begin{cases} 1, & P_k \\ -1, & 1 - P_k \end{cases} \quad (A11)$$

فرایند زیر را تعریف می‌کنیم

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^n d_k, \quad n = 1, 2, \dots \quad (A12)$$

واضح است که فرایند  $\{\gamma_n\}$  یک تقریب درخت دو جمله‌ای باز ترکیبی از فرایند معرفی شده با رابطه (A1) است که فرمول کلی احتمال حرکت به سمت بالا به صورت زیر است:

$$P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ \left( \frac{\rho(\mu - P(n))}{\sigma P(n)} - \frac{1}{2} \sigma \right) \sqrt{\Delta t} \right].$$

برای فرایند  $\{\gamma_n\}$ ، احتمال  $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ -\left( \frac{2\lambda + 1}{2} \right) \right]$  را در رابطه (A11) قرار می‌دهیم.

تحت احتمال  $P_n$ ، فرایند  $\{\gamma_n\}$  تعریف شده توسط رابطه‌های (A11) و (A12) یک تقریب درخت دو جمله‌ای باز ترکیبی از فرایند معرفی شده با رابطه (A1) با  $\lambda = \rho \left( \frac{H}{\sigma} \right)$  و  $\mu = 0$  است. از تعریف زمان-

های توقف  $\tau_i$  برای فرایند رنکو در (۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{P(\tau_i)}{H} = \gamma_n^{Law} \quad (A13)$$

$$\frac{P(\tau_i) - P(\tau_{i-1})}{H} = d_n^{Law} \quad (A14)$$

یک متغیر تصادفی تعریف می‌کنیم

$$v = \min \left\{ n \geq 1 : \max_{t \in [0, n]} (\gamma_n) - \gamma_n = 1 \right\}, \quad (A15)$$

اولین زمان نزول  $\{\gamma_n\}$  است. فرض کنیم  $\gamma_{n-1}$  یک ماکزیمم موضعی در زمان  $V = n$  باشد (برای حالتی که  $\gamma_{n-1}$  یک مینیمم موضعی در زمان  $V = n$  است، اثبات مشابه است). از رابطه (A9) داریم

$$\left| P(\tau_n^a) - P(\tau_{n-1}^a) \right|^{Law} = (2H + \gamma_v H) = (2H + (v-2)H) = vH, \quad (A16)$$

$$E \left[ \left| P(\tau_1^a) - P(\tau_0^a) \right| \right] = HE[v]. \quad (A17)$$

از آنجا که  $V$  اولین زمان نزول بعد از یک تعداد صعود است، احتمال آن از توزیع هندسی با احتمال موفقیت  $\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[ -\left( \frac{2\lambda + 1}{2} \right) \right] \right)$  پیروی می‌کند. مقدار مورد انتظار  $V$  برابر است با

$$E[v] = \sum_{n=1}^{\infty} n \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[ -\left( \frac{2\lambda + 1}{2} \right) \right] \right)^{n-1} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tanh \left[ -\left( \frac{2\lambda + 1}{2} \right) \right] \right)^1, \quad (A18)$$

که در آن مقدار فعلی فرایند  $\gamma_n = \gamma_0 + n - 1$  است. مقدار اولیه فرایند،  $\gamma_0$ ، می‌تواند هر مقدار صحیحی از مینیمم تا ماکزیمم فرایند  $\{\gamma_n\}$  را بگیرد. بنابراین



$$E[v] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^{n+1}} \left(1 + \tanh\left(-\frac{2\lambda+1}{2}\right)\right)^n \left(1 - \tanh\left(-\frac{2\lambda+1}{2}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^{n+1}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(k) \left(1 + \tanh\left(-\frac{2\lambda+1}{2}\right)\right)^n \left(1 - \tanh\left(-\frac{2\lambda+1}{2}\right)\right) \quad (A19)$$

K مقادیر صحیحی را در بازه  $(-\infty, \infty)$  می‌گیرد و  $P(k)$  احتمال این است که مقدار ابتدایی برابر با k باشد:

$$P(k) = P(\gamma_0 = k).$$

تابع چگالی  $\gamma_0$  طبق لم ۲ به صورت روبرو است:

$$P(0) > \left(1 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m(2\lambda+1)}\right)^{-1}$$

دومین جمعوند را در رابطه (A19) در نظر می‌گیریم

$$\left(1 + \tanh\left(-\frac{2\lambda+1}{2}\right)\right)^n \left(1 - \tanh\left(-\frac{2\lambda+1}{2}\right)\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} P(k) = \left(1 - \tanh\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)\right)^n \left(1 + \tanh\left(\frac{2\lambda+1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{2}{e^{2\lambda+1} + 1}\right)^n \left(\frac{2e^{2\lambda+1}}{e^{2\lambda+1} + 1}\right) < 1. \quad (A20)$$

و می‌توان این رابطه را به راحتی با استدلال استقرایی ثابت کرد.

بنابراین ادعای (A20) برای  $n = k + 1$  درست است و می‌توانیم طبق اصول استقرای ریاضی نتیجه بگیریم که (A20) برای هر n برقرار است. در نتیجه

$$E[v] < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^{n+1}} = 2. \quad (A21)$$

از روابط (A17) و (A21) نتیجه می‌گیریم که برای ترسیم رنکو روی فرایند معرفی شده با رابطه (A1)،  $H$ -تلاطم کم‌تر از  $2H$  است،  $\xi_T(H, P) < 2H$ .

حال رابطه‌ی (۱۷) را برای ترسیم کاگی اثبات می‌کنیم. فرض کنید

$$\theta = \min \left\{ u \geq 0 : \max_{t \in [0, u]} P(t) - P(u) = H \right\}. \quad (A22)$$

$P(\theta)$  را می‌توان به صورت یک تغییر زمان از فرایند وینر تعریف شده با خاصیت بازگشت به میانگین فرایند معرفی شده با رابطه (A1)، نمایش داد:

$$\left| P(\tau_1^b) - P(\tau_0^b) \right| = \left| P(\tau_0^b) e^{-\left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W(\theta)} \right| \quad (A23)$$

طبق (A9) داریم:

$$E\left[ \left| P(\tau_1^a) - P(\tau_0^a) \right| \right] = E[2H + OU_\theta], \quad (A24)$$

که در آن

$$OU_{\theta} = OU(\tau_0^b, \tau_1^b) = \left( P(\tau_0^b) e^{-\left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W(\theta)} \right) \cdot \text{sign}(P(\tau_1^a) - P(\tau_0^a)). \quad (A25)$$

از آنجا که  $P(t)$  فرایند معرفی شده با رابطه (A1) است، نقطه ابتدایی  $P(\tau_0^b)$  توزیع نرمال با میانگین

$$\mu = x_0 e^{-\left(\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\right)t_0^b} \frac{\sigma^2}{2}$$

و واریانس  $\sigma_1^2 = x_0 \mu e^{\frac{\sigma^2}{2}} (e^{\sigma^2} - 1)$  دارد. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{OU(\tau_0^b, \tau_1^b)}{\text{sign}(P(\tau_0^a) - P(\tau_1^a))} &= \int_R \left( x e^{-\left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W(\theta)} \right) \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma_1}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\sigma_1}} dx \\ &= e^{-\left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W(\theta)} \times \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2}} \int_R x e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2}(x-\mu)^2} dx = \left( \frac{1}{4\sigma_1^3 \sqrt{2}} + \mu \right) e^{-\left(\rho + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta + \sigma W(\theta)} \end{aligned} \quad (A26)$$

فرایند معرفی شده با رابطه (A1) در توزیع کوچک تر از فرایند وینر است:

$$E[|P(\tau_1^a) - P(\tau_0^a)|] = E[2H + OU_{\theta}] < E[2H + W_{\theta}] = HE \left[ 1 + \left( 1 + \frac{W_{\theta}}{H} \right) \right] = H \left( 1 + E \left[ 1 + \frac{W_{\theta}}{H} \right] \right)$$

متغیر  $1 + \frac{W_{\theta}}{H}$  دارای توزیع نمایی با  $\lambda = 1$  است. بنابراین  $E \left[ 1 + \frac{W_{\theta}}{H} \right] = \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$

در نتیجه  $E[|P(\tau_1^a) - P(\tau_0^a)|] < 2H$  و برای ترسیم کاگی روی فرایند معرفی شده با رابطه (A1)،

$H$ -تلاطم کم تر از  $2H$  است. به عبارتی  $\xi_T(H, P) < 2H$ .

## یادداشت‌ها

<sup>1</sup> Bogomolov

<sup>2</sup>  $\alpha$ -mixing