



یک روش عددی برای حل مسئله قیمت گذاری اختیارات آمریکایی تحت مدل نرخ بهره تصادفی CIR

مریم صفائی^۱

عبدالساده نیسی^۲

نادر نعمت الهی^۳

تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۱/۰۷

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۹/۱۵

چکیده

هدف اصلی این مقاله تعیین قیمت اختیار فروش آمریکایی می باشد هنگامی که نرخ بهره خود از یک فرایند تصادفی تبعیت می کند. بدین منظور، ابتدا مدل دارایی پایه را به مدل نرخ بهره تصادفی کاکس-اینگرسول-راس^۱ (CIR) توسعه می دهیم. سپس، مسئله قیمت گذاری اختیارات آمریکایی تحت مدل نرخ بهره تصادفی CIR، را به صورت یک مسئله مکمل خطی^۲ (LCP) دو بعدی فرمول بندی می کنیم. برای حل این LCP دو بعدی روش تجزیه مولفه‌ای دو سیکل^۳ را پیشنهاد کرده‌ایم. در این روش، LCP دو بعدی به دست آمده برای قیمت گذاری اختیار آمریکایی به شش LCP یک بعدی در چندین مرحله‌ی زمانی کسری تجزیه شده، و سپس هر LCP به طور عددی در دو مرحله حل می شود. به طوری که در مرحله‌ی اول از طریق حل دستگاه معادلات سه قطری قیمت‌های اختیار به دست می آید، و سپس در مرحله‌ی دوم (مرحله به هنگام سازی) مقادیر قیمت‌های اختیار به دست آمده با توجه به شرایط مسئله قیمت گذاری اختیار آمریکایی اصلاح و به هنگام می شوند. در نهایت، نتایج عددی حاصل از روش تجزیه معرفی شده را با نتایج شبیه سازی مونت کارلو مقایسه خواهیم کرد.

واژه‌های کلیدی: روش تجزیه مولفه‌ای، قیمت گذاری اختیارات آمریکایی، مدل نرخ بهره تصادفی CIR، مسئله مکمل خطی.

۱- دانشجوی دکتری گروه آمار، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

۲- دانشیار گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران. (نویسنده مسئول)
a_neisy@atu.ac.ir

۳- استاد تمام گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی و رایانه، دانشگاه علامه طباطبائی، تهران، ایران

۱- مقدمه

بازارهای مالی جهان در طول چند دهه‌ی اخیر شاهد یک انقلاب بزرگ در تجارت اوراق مشتقه بوده است. اوراق مشتقه ابزاری برای کنترل ریسک می‌باشد که به عنوان یک راهبرد سرمایه‌گذاری در بازارهای مالی شناخته شده است (بنث، ۲۰۰۴). در میان انواع مشتقات مالی، اختیارات یکی از مهم‌ترین ابزارهای مالی محسوب می‌شود. به‌طور کلی در حال حاضر از نظر سبک اعمال چهار نوع اختیار معامله در بازارهای مالی وجود دارند، که عبارتند از: اختیار اروپایی، اختیار آمریکایی، اختیار آسیایی و اختیار مانع. در این مقاله، به مسئله قیمت‌گذاری معاملات به سبک اختیار آمریکایی می‌پردازیم.

بر اساس معادله بلک و شولز (۱۹۷۳)، به آسانی می‌توان قیمتی از یک اختیار خرید یا فروش به سبک اروپایی توسط یک تابع معین به‌دست آورد. یکی از فرضیات مهم در مدل بلک-شولز، فرض نرخ بهره ثابت است. بسیاری از مطالعات نشان دادند که این موضوع برای قیمت‌گذاری اختیارات با سررسید بلند مدت در مقایسه با واقعیات بازار قابل قبول نیست. به منظور به‌دست آوردن مدلی انعطاف‌پذیرتر با واقعیات بازار، بسیاری از مطالعات مدل‌های نرخ بهره تصادفی را پیشنهاد کردند. مدل کاکس-اینگرسول-راس (CIR) یکی از مدل‌های مشهور نرخ بهره تصادفی است. در اینجا، به قیمت‌گذاری اختیارات تحت این مدل نرخ بهره تصادفی پرداخته‌ایم.

به دلیل نامعلوم بودن زمان اجرای اختیار آمریکایی هیچ جواب تحلیلی برای قیمت آن وجود ندارد. بنابراین، در این مقاله، روش تجزیه مولفه‌ای دو سیکل را برای حل مسئله قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی تحت مدل نرخ بهره تصادفی CIR معرفی خواهیم کرد. بر این اساس، ابتدا مسئله قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی تحت مدل CIR را به صورت یک مسئله مکمل خطی فرمول‌بندی می‌کنیم. سپس، با استفاده از روش تجزیه مولفه‌ای دو سیکل، مسئله مکمل خطی دو بعدی را به چندین مسئله مکمل خطی یک بعدی در چندین مرحله‌ی زمانی کسری تجزیه می‌کنیم، به‌طوری که جوابی از این مسئله‌های مکمل خطی یک بعدی در دو مرحله به‌دست می‌آیند.

بخش دوم به تشریح مبانی نظری و مروری کوتاه بر پیشینه پژوهش اختصاص داده‌ایم. در بخش سوم به مدل‌سازی و روش حل مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی خواهیم پرداخت. نتایج عددی به‌دست آمده در بخش چهارم ارائه خواهیم کرد. سرانجام، به نتیجه‌گیری تحقیق و ارائه پیشنهادهای آتی در بخش ششم خواهیم پرداخت.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

در سال ۱۹۷۳ در شیکاگو بورس هیات تجاری اختیارات^۴ (CBOE) تاسیس شد، اولین قراردادهای اختیارات در این مکان منعقد شدند. در همان سال بلک و شولز، به‌منظور ایجاد مدلی برای قیمت‌گذاری اختیارات، دینامیک‌هایی از قیمت دارایی پایه S_t به صورت

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (1)$$

مدل‌بندی کردند، که در آن W_t یک حرکت براونی استاندارد است. به‌علاوه، در مدل فوق، نرخ بهره r و نوسان σ ثابت‌هایی مثبت می‌باشند. این مدل به‌طور وسیعی برای مدل‌بندی قیمت‌گذاری اختیارات مورد استفاده قرار گرفت، هاوگ (۱۹۹۷) را ببینید. برای قیمت‌گذاری اختیاراتی با سررسید بلند مدت، اتخاذ یک نرخ بهره ثابت متضاد با واقعیت بازار می‌باشد، برای جزئیات بیشتر به باکشی و همکاران (۲۰۰۰) مراجعه کنید. تعدادی از مطالعات برای غلبه بر این محدودیت مدل بلک-شولز فرض کردند که نرخ بهره تغییر پذیر با زمان است. یکی از مشهورترین فرض‌هایی که برای نرخ بهره تغییر پذیر با زمان ارائه شد این بود که نرخ بهره خود از یک فرایند تصادفی تبعیت می‌کند، از قبیل مدل‌های تصادفی واسیچک^۵ (۱۹۷۷)، کاکس-اینگرسول-راس (۱۹۸۵)، هو-لی^۶ (۱۹۸۶)، هال-وایت^۷ (۱۹۹۰).

مدل واسیچک بر اساس فرایند تصادفی اورنشتاین-اولن‌بک است، دینامیک‌هایی از تغییرات نرخ بهره کوتاه مدت $(r_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ توسط معادله دیفرانسیل تصادفی داده می‌شود.

$$dr_t = \lambda(\bar{r} - r_t)dt + \sigma dW_t,$$

در معادله‌ی فوق W_t یک حرکت براونی استاندارد است. از این‌رو، این مدل دارای یک توزیع گاوسی است. اما، ایرادی که به این مدل وارد می‌شود این است که r_t ممکن است مقادیر منفی اختیار کند.

کاکس، اینگرسول و راس (۱۹۸۵)، توسط اضافه کردن جمله $\sqrt{r_t}$ در ضریب انتشار مدل واسیچک، مدلی ارائه کردند که تحت آن نرخ کوتاه مدت همواره مثبت است. نرخ بهره r_t با استفاده از مدل کاکس-اینگرسول-راس (CIR) به صورت

$$dr_t = \lambda(\bar{r} - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, \quad (2)$$

مدل‌بندی می‌شود، که در آن λ ، \bar{r} و σ ثابت‌هایی مثبت می‌باشند. به‌علاوه، در مدل‌های واسیچک و CIR، λ میانگین سرعت بازگشت r_t را مشخص می‌کند، \bar{r} میانگین بلند مدت فرایند r_t و σ بیانگر نوسان فرایند r_t می‌باشد. در مقایسه‌ای با مدل واسیچک می‌توان گفت که هر دو مدل

دارای ویژگی بازگشت به میانگین می‌باشند، به طوری که در هر دو مدل عامل $\lambda(\bar{r} - r_t)$ یکسان است، به عبارتی در هر دو مدل نرخ بهره تمایل به بازگشت به میانگین طولانی مدت \bar{r} دارد و λ به عنوان سرعت این بازگشت تفسیر می‌شود. جمله نوسان σ در مدل واسیچک در $\sqrt{\Gamma_t}$ ضرب شده است و این باعث برطرف شدن مشکل اصلی مدل واسیچک، یعنی تولید نرخ‌های منفی با احتمال مثبت می‌شود. بنابراین در مدل CIR، هنگامی که نرخ بهره نزدیک به صفر می‌شود، جمله نوسان $\sigma\sqrt{\Gamma_t}$ هم به صفر نزدیک می‌شود و در نتیجه اثر تصادفی حذف می‌شود. بنابراین، نرخ بهره همیشه مثبت باقی می‌ماند. هم‌چنین در این مدل، هنگامی که نرخ بهره افزایش می‌یابد، نوسانات هم افزایش خواهند یافت و این یک ویژگی مطلوب مدل CIR محسوب می‌شود. توجه کنید که در معادله (۲) بایستی شرط $2\lambda\bar{r} > \sigma^2$ برقرار باشد برای اینکه بتوانیم بپذیریم که r مثبت است. به طور کلی می‌توان ویژگی‌های مدل CIR را به صورت زیر خلاصه کرد:

- ۱) نرخ‌های بهره‌ی نامنفی تولید می‌کند.
- ۲) نوسان ثابت نیست و متناسب با ارزش فعلی r_t افزایش می‌یابد.
- ۳) فرایند به یک حالت پایدار به میانگین \bar{r} با سرعت λ همگراست.

برای اطلاعات بیشتر به جیمز و وبر (۲۰۰۱)، بریگو و مرکوریو (۲۰۰۱)، زیتون و گیوپتا (۲۰۰۷)، کوک (۲۰۰۸) مراجعه شود.

یکی دیگر از مدل‌های معروف نرخ بهره تصادفی مدل هال-وایت (۱۹۹۰) می‌باشد که آن یک تعمیم زمان پیوسته از مدل واسیچک است.

در بسیاری از مطالعات، از مدل نرخ بهره‌ی تصادفی که از مدل هال-وایت تبعیت می‌کند استفاده شده است. مزیت مدل CIR نسبت به مدل هال-وایت این است که نرخ‌های بهره تحت مدل CIR همواره مثبت می‌باشند. از این‌رو، در این مقاله، مدل نرخ بهره تصادفی CIR برای قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی برگزیده‌ایم.

قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی یکی از موضوعات مهم تحقیقات در طول چند دهه‌ی اخیر بوده است. در مطالعاتی، از قبیل امین و بودورتا (۱۹۹۵)، هو و همکاران (۱۹۹۷)، چانگ (۱۹۹۷)، منکولد و ورست (۲۰۰۰)، چانگ (۲۰۰۱)، لیندست و لوند (۲۰۰۷)، نونز (۲۰۱۱)، دنگ (۲۰۱۵)، چانگ و همکاران (۲۰۱۷)، جاینگ (۲۰۱۶)، فالکو و همکاران (۲۰۱۷)، قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی را با نرخ بهره تصادفی در نظر گرفته‌اند. اختیارات آمریکایی را می‌توان در هر زمانی قبل از تاریخ سررسید اعمال کرد. معمولاً این خصیصه موجب می‌شود که هیچ جواب تحلیلی برای مسئله قیمت‌گذاری اختیارات آمریکایی وجود نداشته باشد. بنابراین، می‌توان از روش‌های عددی برای

تقریب مسئله مذکور استفاده کرد. مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی تحت مدل نرخ بهره تصادفی CIR را می‌توان به صورت یک مسئله مکمل خطی (LCP) فرمول‌بندی کرد و سپس آن را با استفاده روش‌های عددی، به عنوان مثال روش تجزیه Lu (فالکو و همکاران، ۲۰۱۷)، حل کرد.

۳- مدل‌سازی تحقیق و روش اجرای پژوهش

این پژوهش یک پژوهش کاربردی است. ایده اصلی پژوهش ارائه یک روش تجزیه مولفه‌ای برای به دست آوردن قیمت اختیار فروش آمریکایی تحت نرخ بهره تصادفی CIR می‌باشد. برای تعیین قیمت‌های اختیار فروش آمریکایی حاصل از روش پیشنهادی این پژوهش مراحل زیر در نظر گرفته شده است.

- (۱) به دست آوردن مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی
- (۲) ایجاد شبکه برای دو متغیر حالت (قیمت دارایی پایه و نرخ بهره) و یک شبکه گسسته‌سازی شده برای زمان
- (۳) تقریب مشتقات در مسئله قیمت‌گذاری
- (۴) ارائه یک روش تجزیه برای حل مسئله قیمت‌گذاری اختیار فروش آمریکایی

۳-۱- به دست آوردن مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی تحت نرخ بهره تصادفی CIR

در مدل (۱) نرخ بهره ثابت در نظر گرفته می‌شود. اینک، نرخ بهره در این مدل را به صورت یک فرایند تصادفی که از مدل CIR تبعیت می‌کند، توسعه می‌دهیم. بنابراین، دینامیک‌های از قیمت دارایی پایه S_t و نرخ بهره تصادفی r_t توسط دستگاهی از معادلات دیفرانسیل تصادفی (SDEs) به صورت زیر داده می‌شوند:

$$\begin{cases} dS_t = r_t S_t dt + \sigma_1 S_t dW_t^S, \\ dr_t = \lambda(\bar{r} - r_t) dt + \sigma_2 \sqrt{r_t} dW_t^r, \end{cases} \quad (3)$$

در اینجا، λ سرعت بازگشت به میانگین از فرایند r_t را مشخص می‌کند. به علاوه، پارامتر σ_1 و σ_2 به ترتیب بیانگر نوسانات فرایندهای S_t و r_t می‌باشند، و پارامتر \bar{r} میانگین بلند مدت از فرایند r_t را نشان می‌دهد. به علاوه، W_t^S و W_t^r حرکت‌های براونی استاندارد با ساختار همبستگی $dW_t^S dW_t^r = \rho dt$ می‌باشند.

فرض کنید $u = u(S, r, t)$ بیانگر ارزشی از یک اختیار فروش آمریکایی تحت مدل CIR باشد. با استفاده از مدل (۳)، عملگر دیفرانسیل جزئی CIR نسبت به u به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathcal{L}u = rS \frac{\partial u}{\partial S} + \lambda(\bar{r} - r) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 u}{\partial S^2} + \frac{1}{2} r \sigma_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 S \sqrt{r} \frac{\partial^2 u}{\partial S \partial r} - ru. \quad (4)$$

با دامنه تغییرات $(S, r, \tau) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, T]$ و $T > 0$ معلوم و بیانگر زمان سررسید اختیار می‌باشد.

تابع بازده اختیار فروش آمریکایی (یا، شرط اولیه) عبارت است از:

$$u(S, r, 0) = H(S) = \max(0, K - S) \quad (5)$$

که در آن K قیمت اعمال است.

عملگر (۴) با استفاده از تغییر متغیرهای $x = \ln S$ و $V(x, r, \tau) = u(S, r, \tau)$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\mathcal{L}V = \left(r - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \frac{\partial V}{\partial x} + \lambda(\bar{r} - r) \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{2} r \sigma_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \rho \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial r} - rV. \quad (6)$$

با دامنه تغییرات $(x, r, \tau) \in (-\infty, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ هم‌چنین، تابع بازده (۵) (شرط اولیه) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$V(x, r, 0) = h(x) = \max(K - e^x, 0). \quad (7)$$

شرایط مرزی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم (جاینگ، ۲۰۱۶):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x, r, \tau) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = K, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} V(x, r, \tau) = 0, \quad (9)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} V(x, r, \tau) = 0, \quad (10)$$

$$V(x, 0, \tau) = \max \left\{ K \Phi \left(\frac{\ln K - x + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \tau}{\sigma_1 \sqrt{\tau}} \right) - e^x \Phi \left(\frac{\ln K - x + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \tau}{\sigma_1 \sqrt{\tau}} \right), h(x) \right\}, \quad (11)$$

که در آن Φ تابع توزیع نرمال استاندارد است.

امکان اعمال زودتر در اختیار آمریکایی، به منظور جلوگیری از ایجاد فرصت آربیتراژی، موجب تحمیل قید زیر می‌شود:

$$V(x, r, \tau) \geq h(x).$$

سرانجام، مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی را می‌توان به صورت مسئله مکمل خطی نوشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \tau} - \mathcal{L}V \geq 0, \\ V \geq h, \\ \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} - \mathcal{L}V\right) (V - h) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه و مرزی (۱۱)-(۷).

۳-۲- ایجاد شبکه

قبل از اینکه تقریب‌های تفاضل متناهی را برای متغیرهای فضا بیان کنیم، دامنه نامتناهی را به یک دامنه متناهی $(x, r, \tau) \in [x_{min}, x_{max}] \times [0, r_{max}] \times [0, T]$ محدود می‌کنیم. بنابراین، شرایط مرزی (۱۱)-(۸) به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$V(x_{min}, r, \tau) = K,$$

$$V(x_{max}, r, \tau) = 0,$$

$$V(x, r_{max}, \tau) = 0,$$

$$V(x, 0, \tau) = \max \left\{ K\Phi \left(\frac{\ln K - x + \frac{1}{2}\sigma_1^2\tau}{\sigma_1\sqrt{\tau}} \right) - e^x\Phi \left(\frac{\ln K - x + \frac{1}{2}\sigma_1^2\tau}{\sigma_1\sqrt{\tau}} \right), h(x) \right\},$$

شبکه‌های یکنواخت دارای نمونه‌های هم فاصله برای دو متغیر حالت می‌باشند. این شبکه‌ها دارای دو مزیت هستند: اول، به آسانی ایجاد می‌شوند، دوم، چون نمونه‌ها هم اندازه هستند، تقریب‌های تفاضل متناهی برای مشتق‌ها در عملگر دیفرانسیل جزئی به یک فرم ساده‌ای به دست می‌آیند. شبکه‌های غیر یکنواخت به‌طور پیچیده‌تری ایجاد می‌شوند، و تقریب‌های تفاضل متناهی برای مشتق‌ها پیچیده‌تر به دست می‌آیند. این شبکه‌ها، با این اوصاف، می‌توانند در نقاط اطراف خاص دقیق‌تر ایجاد شوند، به طور خاص، در اطراف ناحیه $(S, r) = (K, 0)$ که در آن قیمت اختیار مورد نیاز است. بنابراین، اغلب شبکه‌های غیر یکنواخت ترجیح داده می‌شوند، چون این شبکه‌ها قیمت‌های دقیق‌تری را با نقاط شبکه کمتر و همچنین با زمان محاسباتی کمتری تولید می‌کنند. برای اطلاعات بیشتر به رویوا (۲۰۱۳) مراجعه شود.

یک شبکه غیریکنواخت $r_{min} = r_0 < r_1 < \dots < x_{min} = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_S} = x_{max}$ و $r_{N_r} = r_{max}$ در جهات x و r ایجاد می‌کنیم. به علاوه، مقادیر عددی در هر نقطه شبکه توسط $V_{ik}^n \approx V(x_i, r_k, \tau_n)$ نشان داده می‌شود، به قسمی که $k = 1, 2, \dots, N_r$ ، $i = 1, 2, \dots, N_x$ و $n = 0, \dots, N_t$. یک شبکه غیریکنواخت همانند صفایی و همکاران (2017) به صورت زیر تولید

می‌کنیم، به گونه‌ای که در نزدیکی قیمت اعمال K و در نزدیکی نقطه نوسان $r_0 = 0$ ظریف‌تر می‌باشد.

در جهت x ، نقاط شبکه $0 = x_{min} = x_0 < x_1 < \dots < x_{N_S} = x_{max}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_i = \beta \sinh \left(\left[\sinh^{-1} \left(\frac{x_{max}-K}{\beta} \right) - \sinh^{-1} \left(\frac{x_{min}-K}{\beta} \right) \right] i + \sinh^{-1} \left(\frac{x_{min}-K}{\beta} \right) \right),$$

و $\beta = \frac{K}{5}$. سپس، در جهت r شبکه $0 = r_0 < r_1 < \dots < r_{N_r} = r_{max}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$r_k = d \sinh \left(\left[\frac{1}{N_r} \sinh^{-1} \left(\frac{r_{max}}{d} \right) \right] k \right), \quad 0 \leq k \leq N_r.$$

توجه کنید که پارامتر d تعداد نقاط شبکه r را در همسایگی نقطه $r=0$ کنترل می‌کند. به علاوه، اندازه‌های شبکه این جهت‌ها برابر با $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ و $\Delta r_k = r_{k+1} - r_k$ است.

۳-۳- تقریب‌های تفاضل متناهی برای مشتقات

تقریب‌های تفاضل متناهی برای مشتقات به آسانی به دست می‌آیند هنگامی که شبکه‌ها یکنواخت می‌باشند. به آسانی می‌توان این تقریب‌ها را برای شبکه‌های غیر یکنواخت تعمیم داد، اما تقریب‌ها کمی پیچیده‌تر می‌شوند. در این بخش، تقریب‌های تفاضل متناهی را برای مشتق‌های مرتبه‌ی اول، دوم در جهات S ، r در عملگر (۶) به ازای یک شبکه غیر یکنواخت ارائه می‌کنیم.

تقریب تفاضل‌های پیشرو و پسرو، برای تقریب مشتق جزئی V نسبت به x ، به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{\partial^+}{\partial x} (V(x_i, r_k, \tau_n)) = \frac{V_{i+1,k}^n - V_{i,k}^n}{\Delta x_i},$$

$$\frac{\partial^-}{\partial x} (V(x_i, r_k, \tau_n)) = \frac{u_{i,k}^n - u_{i-1,k}^n}{\Delta x_{i-1}}$$

میانگینی از این دو معادله، تقریب تفاضل مرکزی را نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial V}{\partial x} (x_i, r_k, \tau_n) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^+}{\partial x} (V(x_i, r_k, \tau_n)) + \frac{\partial^-}{\partial x} (V(x_i, r_k, \tau_n)) \right),$$

تعمیمی از تقریب فوق، روش θ می‌باشد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial X}(x_i, r_k, \tau_n) &= \theta \left(\frac{\partial^+}{\partial X}(V(x_i, r_k, \tau_n)) \right) + (1 - \theta) \left(\frac{\partial^-}{\partial X}(V(x_i, r_k, \tau_n)) \right) \\ &= \alpha_{-1,i}^{(x)} V_{i-1,k} + \alpha_{0,i}^{(x)} V_{ik} + \alpha_{1,i}^{(x)} V_{i+1,k}, \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن ضرائب عبارتند از:

$$\alpha_{-1,i}^{(x)} = \frac{\theta - 1}{\Delta x_{i-1}}, \quad \alpha_{0,i}^{(x)} = \frac{-\theta \Delta x_{i-1} + (1 - \theta) \Delta x_i}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i}, \quad \alpha_{1,i}^{(x)} = \frac{\theta}{\Delta x_i}.$$

به طوری که می‌توان نشان داد بهترین تقریب توسط انتخاب $\theta = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}$ به دست می‌آید، کلگ (۲۰۰۲) را ببینید. به‌طور مشابه، مشتق جزئی مرتبه اول V نسبت به r را به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \alpha_{-1,k}^{(r)} V_{i,k-1} + \alpha_{0,k}^{(r)} V_{ik} + \alpha_{1,k}^{(r)} V_{i,k+1}, \quad (14)$$

که در آن ضرائب عبارتند از:

$$\alpha_{-1,k}^{(r)} = \frac{\theta - 1}{\Delta r_{k-1}}, \quad \alpha_{0,k}^{(r)} = \frac{-\theta \Delta r_{k-1} + (1 - \theta) \Delta r_k}{\Delta r_{k-1} \Delta r_k}, \quad \alpha_{1,k}^{(r)} = \frac{\theta}{\Delta r_k}.$$

که در آن می‌توان $\theta = \frac{\Delta r_{k-1}}{\Delta r_{k-1} + \Delta r_k}$ جایگذاری کرد.

مشتق جزئی مرتبه‌ی دوم V نسبت به x را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{\frac{\partial^-}{\partial X}(V(x_{i+1}, r_k, \tau_n)) - \frac{\partial^-}{\partial X}(V(x_i, r_k, \tau_n))}{\frac{1}{2}(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \\ &= \beta_{-1,i}^{(x)} V_{i-1,k} + \beta_{0,i}^{(x)} V_{ik} + \beta_{1,i}^{(x)} V_{i+1,k}, \end{aligned} \quad (15)$$

که $\beta_{-1,i}^{(x)} = \frac{2}{\Delta x_i (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}$, $\beta_{0,i}^{(x)} = \frac{-2}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}}$, $\beta_{1,i}^{(x)} = \frac{2}{\Delta x_{i+1} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}$ می‌باشد.

به‌طور مشابه، مشتق جزئی مرتبه‌ی دوم V نسبت به r را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \beta_{-1,k}^{(r)} V_{i,k-1} + \beta_{0,k}^{(r)} V_{ik} + \beta_{1,k}^{(r)} V_{i,k+1}, \quad (16)$$

که $\beta_{-1,j}^{(r)} = \frac{2}{\Delta r_k (\Delta r_k + \Delta r_{k+1})}$, $\beta_{0,j}^{(r)} = \frac{-2}{\Delta r_k \Delta r_{k+1}}$, $\beta_{1,j}^{(r)} = \frac{2}{\Delta r_{k+1} (\Delta r_k + \Delta r_{k+1})}$ است.

و تقریب مشتقات آمیخته عبارتند از:

(۱۷)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial r} = \sum_{l=-1}^1 \sum_{j=-1}^1 \alpha_{l,i}^{(x)} \alpha_{k,j}^{(r)} V_{i+1,k+j} = V_{i-1,k} + \delta_{2ik}^{(xr)} V_{i-1,k} + \dots + \delta_{9ik}^{(xr)} V_{i+1,k+1},$$

که در آن $\delta_{1ik}^{(xr)} = \alpha_{-1,i}^{(x)} \alpha_{-1,k}^{(r)}$, $\delta_{2ik}^{(xr)} = \alpha_{-1,i}^{(x)} \alpha_{0,k}^{(r)}$, \dots , $\delta_{9ik}^{(xr)} = \alpha_{1,i}^{(x)} \alpha_{1,k}^{(r)}$ است.

سپس، در جهت t از یک مرحله‌ی زمانی ثابت استفاده شده است، به طوری که یک مرحله‌ی زمانی برابر با $\Delta\tau = \frac{T}{N_t}$ با $N_t \geq 1$ می‌باشد. در این صورت، به ازای $n = 0, 1, \dots, N_t$ نقاط شبکه عبارتند از: $\tau_n = n \cdot \Delta\tau$.

اگر از تقریب تفاضل پیشرو برای مشتق جزئی نسبت به زمان استفاده کنیم، در این صورت طرح صریح را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta\tau} = \mathcal{L}V^n.$$

اگر از تقریب تفاضل پسرو برای مشتق جزئی نسبت به زمان استفاده کنیم، در این صورت طرح ضمنی نتیجه خواهد شد:

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta\tau} = \mathcal{L}V^{n+1},$$

اگر از دو معادله فوق میانگین بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta\tau} = \frac{1}{2} \mathcal{L}V^n + \frac{1}{2} \mathcal{L}V^{n+1},$$

این طرح را کرانک-نیکولسون^۱ می‌گویند.

۳-۴- ارائه یک روش تجزیه برای حل مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی تحت مدل CIR

صفائی و همکاران (۲۰۱۷) یک روش تجزیه برای حل کردن مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی تحت مدل نوسان تصادفی هستون معرفی کردند. ایده‌ی روش تجزیه عملگر این است که هر مرحله‌ی زمانی به چندین مرحله‌ی زمانی کسری با عملگرهای ساده‌تر تقسیم شود. در این مقاله، می‌خواهیم این روش را به روش تجزیه مولفه‌ای دو سیکل برای حل مسئله قیمت‌گذاری اختیار آمریکایی تحت مدل نرخ بهره تصادفی CIR توسعه دهیم. برای این منظور، نامعادله دیفرانسیل جزئی در مسئله (۱۲) را با استفاده از یک متغیر کمکی Ψ می‌توان به صورت زیر به یک معادله دیفرانسیل جزئی تبدیل کرد:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \mathcal{L}V = \Psi, \quad (18)$$

$$\Psi \geq 0, V \geq h, \Psi(V - h) = 0. \quad (19)$$

هم اکنون، عملگر (۶) به سه عملگر به صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$\mathcal{L}V = \mathcal{L}^x V + \mathcal{L}^r V + \mathcal{L}^{xr} V,$$

که در آن عملگرهای $\mathcal{L}^x V$ مطابق با جملات $\frac{\partial V}{\partial x}$ و $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ ، $\mathcal{L}^r V$ مطابق با $\frac{\partial V}{\partial r}$ و $\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$ و $\mathcal{L}^{xr} V$ مطابق با $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial r}$ از عملگر $\mathcal{L}V$ می‌باشند که به صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^x V_{ik} &= \left(r - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \left(\alpha_{-1,i}^{(x)} V_{i-1,k} + \alpha_{0,i}^{(x)} V_{ik} + \alpha_{1,i}^{(x)} V_{i+1,k} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sigma_1^2 \left(\beta_{-1,i}^{(x)} V_{i-1,k} + \beta_{0,i}^{(x)} V_{ik} + \beta_{1,i}^{(x)} V_{i+1,k} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^r V_{ik} &= \lambda (\bar{r} - r_k) \left(\alpha_{-1,k}^{(r)} V_{i,k-1} + \alpha_{0,k}^{(r)} V_{ik} + \alpha_{1,k}^{(r)} V_{i,k+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} r_k \sigma_2^2 \left(\beta_{-1,k}^{(r)} V_{i,k-1} + \beta_{0,k}^{(r)} V_{ik} + \beta_{1,k}^{(r)} V_{i,k+1} \right) - r V_{ik}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^{xr} V_{ik} = \rho \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r_k} \left(\delta_{1ik}^{(xr)} V_{i-1,k-1} + \delta_{2ik}^{(xr)} V_{i-1,k} + \dots + \delta_{9ik}^{(xr)} V_{i+1,k+1} \right).$$

سپس، معادله‌ی (۱۸) را می‌توان با استفاده از روش تجزیه مولفه‌ای دو سیکل به صورت زیر تجزیه کرد:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{V_{ik}^{n+\frac{1}{6}} - V_{ik}^n}{\Delta \tau} &= \mathcal{L}^x \frac{V_{ik}^{n+\frac{1}{6}} + V_{ik}^n}{2} + \psi_{ik}^n, \\ \frac{V_{ik}^{n+\frac{2}{6}} - V_{ik}^{n+\frac{1}{6}}}{\Delta \tau} &= \mathcal{L}^r \frac{V_{ik}^{n+\frac{2}{6}} + V_{ik}^{n+\frac{1}{6}}}{2} + \psi_{ik}^{n+\frac{1}{6}} - \psi_{ik}^n, \\ \frac{V_{ik}^{n+\frac{3}{6}} - V_{ik}^{n+\frac{2}{6}}}{\Delta \tau} &= \mathcal{L}^{xr} \frac{V_{ik}^{n+\frac{3}{6}} + V_{ik}^{n+\frac{2}{6}}}{2} + \psi_{ik}^{n+\frac{2}{6}} - \psi_{ik}^{n+\frac{1}{6}}, \\ \frac{V_{ik}^{n+\frac{4}{6}} - V_{ik}^{n+\frac{3}{6}}}{\Delta \tau} &= \mathcal{L}^{xr} \frac{V_{ik}^{n+\frac{4}{6}} + V_{ik}^{n+\frac{3}{6}}}{2} + \psi_{ik}^{n+\frac{3}{6}} - \psi_{ik}^{n+\frac{2}{6}}, \\ \frac{V_{ik}^{n+\frac{5}{6}} - V_{ik}^{n+\frac{4}{6}}}{\Delta \tau} &= \mathcal{L}^r \frac{V_{ik}^{n+\frac{5}{6}} + V_{ik}^{n+\frac{4}{6}}}{2} + \psi_{ik}^{n+\frac{4}{6}} - \psi_{ik}^{n+\frac{3}{6}}, \\ \frac{V_{ik}^{n+1} - V_{ik}^{n+\frac{5}{6}}}{\Delta \tau} &= \mathcal{L}^x \frac{V_{ik}^{n+1} + V_{ik}^{n+\frac{5}{6}}}{2} + \psi_{ik}^{n+1} - \psi_{ik}^{n+\frac{4}{6}}. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

مقادیر V_{ij} و Ψ_{ij} بایستی در قیدهای مسئله قیمت‌گذاری اختیار صدق کنند. بنابراین، در هر مرحله‌ی زمانی، مقادیر V_{ij} و Ψ_{ij} بایستی بر حسب قیدهای فرمول (۱۹) اصلاح کرد. از این‌رو، مسئله مکمل خطی (۱۹)-(۱۸) به شش مسئله مکمل خطی بر اساس معادلات (۲۰) به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{V_{ik}^{n+\frac{1}{6}} - V_{ik}^n}{\Delta\tau} = \mathcal{L}^x \frac{V_{ik}^{n+\frac{1}{6}} + V_{ik}^n}{2} + \Psi_{ik}^n, \\ \frac{V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} - V_{ik}^{n+\frac{1}{6}}}{\Delta\tau} = \Psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} - \Psi_{ik}^n, \\ \Psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} \geq 0, V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} \geq h(x_i), \Psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} \left(V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} - h(x_i) \right) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} \frac{V_{ik}^{n+\frac{2}{6}} - V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+}}{\Delta\tau} = \mathcal{L}^r \frac{V_{ik}^{n+\frac{2}{6}} + V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+}}{2} + \Psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+}, \\ \frac{V_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+} - V_{ik}^{n+\frac{2}{6}}}{\Delta\tau} = \Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+} - 2\Psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+}, \\ \Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+} \geq 0, V_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+} \geq h(x_i), \Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+} \left(V_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+} - h(x_i) \right) = 0, \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} \frac{V_{ik}^{n+\frac{3}{6}} - V_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+}}{\Delta\tau} = \mathcal{L}^{xr} \frac{V_{ik}^{n+\frac{3}{6}} + V_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+}}{2} + \Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+}, \\ \frac{V_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+} - V_{ik}^{n+\frac{3}{6}}}{\Delta\tau} = \Psi_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+} - 2\Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+}, \\ \Psi_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+} \geq 0, V_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+} \geq h(x_i), \Psi_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+} \left(V_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+} - h(x_i) \right) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \frac{V_{ik}^{n+\frac{4}{6}} - V_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+}}{\Delta\tau} = \mathcal{L}^r \frac{V_{ik}^{n+\frac{4}{6}} + V_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+}}{2} + \Psi_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+}, \\ \frac{V_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} - V_{ik}^{n+\frac{4}{6}}}{\Delta\tau} = \Psi_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} - 2\Psi_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+}, \\ \Psi_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} \geq 0, V_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} \geq h(x_i), \Psi_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} \left(V_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} - h(x_i) \right) = 0, \end{cases} \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_{ik}^{n+\frac{5}{6}} - V_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+}}{\Delta\tau} = \mathcal{L}^r \frac{V_{ik}^{n+\frac{5}{6}} + V_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+}}{2} + \psi_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+}, \\ \frac{V_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+} - V_{ik}^{n+\frac{5}{6}}}{\Delta\tau} = \psi_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+} - 2\psi_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+}, \\ \psi_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+} \geq 0, V_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+} \geq h(x_i), \psi_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+} \left(V_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+} - h(x_i) \right) = 0, \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_{ik}^{(n+1)^-} - V_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+}}{\Delta\tau} = \mathcal{L}^x \frac{V_{ik}^{(n+1)^-} + V_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+}}{2} + \psi_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+}, \\ \frac{V_{ik}^{n+1} - V_{ik}^{(n+1)^-}}{\Delta\tau} = \psi_{ik}^{n+1} - 2\psi_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+}, \\ \psi_{ik}^{n+1} \geq 0, V_{ik}^{n+1} \geq h(x_i), \psi_{ik}^{n+1} (V_{ik}^{n+1} - h(x_i)) = 0, \end{array} \right. \quad (26)$$

که در آن به ازای $m = 1, 2, \dots, 5$ داریم $(n + \frac{m}{6})^+ \in (n + \frac{m}{6}, n + \frac{m+1}{6})$. هر یک از LCP های (۲۴)–(۲۱) از دو مرحله تشکیل شده‌اند. در مرحله اول، دستگاهی از معادلات خطی حل می‌شود. در مرحله دوم (مرحله به هنگام سازی)، مقادیر میانی به‌دست آمده از اولین مرحله اصلاح می‌شوند. LCP های فوق را بر اساس روش تجزیه به صورت زیر حل می‌کنیم:

• مرحله ۱

LCP (۲۱) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A^x V_{1:N_x-1, K}^{n+\frac{1}{6}} = F_{1:N_x-1, K}^{(1)} \quad (27)$$

$$\frac{V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} - V_{ik}^{n+\frac{1}{6}}}{\Delta\tau} = \psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} - \psi_{ik}^n \quad (28)$$

$$\psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} \geq 0, V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} \geq h(x_i), \psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} \left(V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} - h(x_i) \right) = 0, \quad (29)$$

برای اندیس ثابت k ، معادلات در (۲۷) به یک دستگاه سه قطری منجر می‌شود. مقادیر مولفه‌های بردار $V_{1:N_x-1, k}^{n+\frac{1}{6}}$ توسط حل کردن این دستگاه به‌دست می‌آیند. توجه کنید که A^x یک ماتریس سه قطری به صورت زیر است:

$$A^x = \begin{pmatrix} b_{1k}^x & c_{1k}^x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{2k}^x & b_{2k}^x & c_{2k}^x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{N_x-2,k}^x & c_{N_x-2,k}^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N_x-1,k}^x & b_{N_x-1,k}^x \end{pmatrix}, \quad (30)$$

که در آن، به ازای $i = 1, 2, \dots, N_x - 1$ ، داریم

$$a_{ik}^x = -\frac{1}{2} \left(r_k - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \alpha_{-1,i}^{(x)} - \frac{1}{4} \sigma_1^2 \beta_{-1,i}^{(x)},$$

$$b_{ik}^x = \frac{1}{\Delta\tau} - \frac{1}{2} \left(r_k - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \alpha_{0,i}^{(x)} - \frac{1}{4} \sigma_1^2 \beta_{0,i}^{(x)},$$

$$c_{ik}^x = -\frac{1}{2} \left(r_k - \frac{1}{2} \sigma_1^2 \right) \alpha_{1,i}^{(x)} - \frac{1}{4} \sigma_1^2 \beta_{1,i}^{(x)},$$

به علاوه، برای V_{ik}^n و ψ_{ik}^n معلوم، به ازای $i = 1, 2, \dots, N_x$ ، مولفه‌هایی از بردار $F_{1:N_x-1,k}^{(1)}$ عبارت است از:

$$F_{ik}^{(1)} = -a_{ik}^x V_{i-1,k}^n - \left(b_{ik}^x - \frac{2}{\Delta\tau} \right) V_{ik}^n - c_{ik}^x V_{i+1,k}^n + \psi_{ik}^n.$$

توجه کنید که مقادیر $V_{ik}^{n+\frac{1}{6}}$ بدون در نظر گرفتن شرایط (۱۹) به دست آوردیم. بنابراین، توسط معادلات (۲۸)–(۲۹)، مقادیر $V_{ik}^{n+\frac{1}{6}}$ به $V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+}$ به هنگام می‌شوند، به طوری که مقادیر $V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+}$ در شرایط (۱۹) صدق می‌کنند. چون $\psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+} \geq 0$ می‌توان معادله $\frac{V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+} - V_{ik}^{n+\frac{1}{6}}}{\Delta\tau} = \psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+}$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+} \geq V_{ik}^{n+\frac{1}{6}} - \Delta\tau \psi_{ik}^n,$$

به علاوه چون $V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+} \geq h(x_i)$ ، بنابراین خواهیم داشت:

$$V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+} = \max \left(h(x_i), V_{ik}^{n+\frac{1}{6}} - \Delta\tau \psi_{ik}^n \right)$$

پس از آن، به ازای مقادیر به دست آمده $V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+}$ ، مقادیر $\psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+}$ توسط معادله تقریب زده می‌شوند.

$$\psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+} = \psi_{ik}^n + \frac{V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+} - V_{ik}^{n+\frac{1}{6}}}{\Delta\tau}$$

• مرحله ۲

LCP (۲۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A^r V_{i,1:N_r-1}^{n+\frac{2}{6}} = F_{i,1:N_r-1}^{(2)}, \quad (31)$$

$$V_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+} = \max \left(h(x_i), V_{ik}^{n+\frac{2}{6}} - 2\Delta\tau\psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} \right) \quad (32)$$

$$\psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+} = 2\psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} + \frac{V_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+} - V_{ik}^{n+\frac{2}{6}}}{\Delta\tau}, \quad (33)$$

به‌طوری‌که، به ازای i ثابت، مقادیر مولفه‌های بردار $V_{i,1:N_r-1}^{n+\frac{2}{6}}$ توسط حل کردن دستگاه سه قطری (۳۱) به‌دست می‌آید. توجه کنید که A^r یک ماتریس سه قطری به صورت

$$A^r = \begin{pmatrix} b_1^r & c_1^r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2^r & b_2^r & c_2^r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N_r-2}^r & c_{N_r-2}^r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N_r-1}^r & b_{N_r-1}^r \end{pmatrix}, \quad (34)$$

است، که در آن، به ازای $k = 1, 2, \dots, N_r - 1$ داریم

$$a_k^r = -\frac{1}{2}\lambda(\bar{r} - r_k)\alpha_{-1,k}^{(r)} - \frac{1}{4}r_k\sigma_2^2\beta_{-1,k}^{(r)},$$

$$b_k^r = \frac{r_k}{2} + \frac{1}{\Delta\tau} - \frac{1}{2}\lambda(\bar{r} - r_k)\alpha_{0,k}^{(r)} - \frac{1}{4}r_k\sigma_2^2\beta_{0,k}^{(r)},$$

$$c_k^r = -\frac{1}{2}\lambda(\bar{r} - r_k)\alpha_{1,k}^{(r)} - \frac{1}{4}r_k\sigma_2^2\beta_{1,k}^{(r)},$$

مولفه‌های بردار $F_{ik}^{(2)}$ به ازای مقادیر معلوم $V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+}$ و $\psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$F_{ik}^{(2)} = -a_k^r V_{i-1,k}^{(n+\frac{1}{6})^+} - \left(b_k^r - \frac{2}{\Delta\tau}\right) V_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+} - c_k^r V_{i+1,k}^{(n+\frac{1}{6})^+} + \psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})^+}.$$

سپس، به طور مشابه مرحله ۱، جواب‌های تقریبی $V_{i,k}^{n+\frac{2}{6}}$ و $\Psi_{ik}^{(n+\frac{1}{6})+}$ به ترتیب با استفاده از معادلات (۳۲) و (۳۳) به مقادیر $V_{ik}^{(n+\frac{2}{6})+}$ و $\Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})+}$ در سطح زمانی میانی $(n+\frac{2}{6})^+ \in (n+\frac{2}{6}, n+\frac{3}{6})$ اصلاح می‌شوند.

• مرحله ۳

می‌توان LCP (۲۳) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A^{xr} V_{ik}^{n+\frac{3}{6}} = F_{ik}^{(3)}, \quad (35)$$

$$V_{ik}^{(n+\frac{3}{6})+} = \max \left(h(x_i), V_{ik}^{n+\frac{3}{6}} - 2\Delta\tau \Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})+} \right), \quad (36)$$

$$\Psi_{ik}^{(n+\frac{3}{6})+} = 2\Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})+} + \frac{V_{ik}^{(n+\frac{3}{6})+} - V_{ik}^{n+\frac{3}{6}}}{\Delta\tau}. \quad (37)$$

بردار ستونی $V_{ik}^{n+\frac{3}{6}} = \left(V_{i-1,k-1}^{n+\frac{3}{6}}, V_{i-1,k}^{n+\frac{3}{6}}, \dots, V_{i+1,k+1}^{n+\frac{3}{6}} \right)^T$ توسط حل کردن معادله (۳۵) تقریب زده می‌شود. به علاوه، A^{xr} یک ماتریس قطری به صورت $A^{xr} = \text{diag}(a_{1ik}^{(xr)}, a_{2ik}^{(xr)}, \dots, a_{9ik}^{(xr)})$ است، که در آن

$$\begin{cases} a_{j,ik}^{(xr)} = -\frac{1}{2}\rho\sigma_1\sigma_2\sqrt{r_k}\delta_{jik}^{(xr)}, & j = 1:9, j \neq 5, \\ a_{j,ik}^{(xr)} = \frac{1}{\Delta\tau} - \frac{9}{24}\rho\eta\gamma_j\delta_{jik}^{(xr)}, & j = 5, \end{cases} \quad (38)$$

مولفه‌های بردار $F_{ik}^{(3)}$ به ازای مقادیر معلوم $V_{ik}^{(n+\frac{2}{6})+}$ و $\Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})+}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$F_{ik}^{(3)} = -a_{1ik}^{(xr)} V_{i-1,k-1}^{(n+\frac{2}{6})+} + \dots + \left(\frac{2}{\Delta\tau} - a_{5ik}^{(xr)} \right) V_{i,k}^{(n+\frac{2}{6})+} + \dots + \left(-a_{9ik}^{(xr)} \right) V_{i+1,k+1}^{(n+\frac{2}{6})+} + \Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})+}.$$

توجه کنید که برای حل دستگاه (۳۵) ابتدا بایستی آن را به سه دستگاه سه قطری تجزیه کرد، سپس با استفاده از الگوریتم توماس می‌توان این دستگاه معادلات سه قطری را حل کرد.

به‌طور مشابه مرحله ۱، جواب‌های تقریبی $V_{i,k}^{n+\frac{3}{6}}$ و $\Psi_{ik}^{(n+\frac{2}{6})^+}$ به ترتیب مطابق با معادلات (۳۶) و (۳۷) به مقادیر $V_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+}$ و $\Psi_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+}$ در سطح زمانی میانی $(n + \frac{3}{6}, n + \frac{4}{6}) \in (n + \frac{3}{6})^+$ اصلاح می‌شوند.

• مرحله ۴

می‌توان LCP (۲۴) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A^{xr} V_{ik}^{n+\frac{4}{6}} = F_{ik}^{(4)}, \quad (39)$$

$$V_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} = \max \left(h(x_i), V_{ik}^{n+\frac{4}{6}} - 2\Delta\tau \Psi_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+} \right) \quad (40)$$

$$\Psi_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} = 2\Psi_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+} + \frac{V_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} - V_{ik}^{n+\frac{4}{6}}}{\Delta\tau}. \quad (41)$$

که در معادله (۳۹) ماتریس سه قطری A^{xr} همانند معادله (۳۸) می‌باشد. مولفه‌های بردار $F_{ik}^{(4)}$ بر حسب مقادیر معلوم $V_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+}$ و $\Psi_{ik}^{(n+\frac{3}{6})^+}$ می‌باشد. همانند مرحله ۳، مقادیر حاصل از حل دستگاه (۳۹) با استفاده از معادلات (۴۰) و (۴۱) به هنگام و اصلاح می‌شوند.

• مرحله ۵

می‌توان LCP (۲۵) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A^r V_{i,1:N_r-1}^{n+\frac{5}{6}} = F_{i,1:N_r-1}^{(5)}$$

$$V_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+} = \max \left(h(x_i), V_{ik}^{n+\frac{5}{6}} - 2\Delta\tau \Psi_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} \right),$$

$$\Psi_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+} = 2\Psi_{ik}^{(n+\frac{4}{6})^+} + \frac{V_{ik}^{(n+\frac{5}{6})^+} - V_{ik}^{n+\frac{5}{6}}}{\Delta\tau},$$

که در آن ماتریس سه قطری A^F همانند معادله (۳۴) می باشد. همانند مرحله ۲، ابتدا مقادیر اختیار محاسبه و سپس به هنگام می شوند.

• مرحله ی ۶

LCP (۲۶) را می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$A^x V_{1:N_x-1,k}^{(n+1)-} = F_{1:N_x-1,k}^{(6)} \quad (42)$$

$$V_{ik}^{n+1} = \max \left(h(x_i), V_{ik}^{(n+1)-} - 2\Delta\tau \psi_{ik}^{\left(n+\frac{5}{6}\right)+} \right), \quad (43)$$

$$\psi_{ik}^{n+1} = 2\psi_{ik}^{\left(n+\frac{5}{6}\right)+} + \frac{V_{ik}^{n+1} - V_{ik}^{(n+1)-}}{\Delta\tau},$$

مقادیر بردار $V_{1:N_S-1,k}^{(n+1)-}$ ، حاصل از حل دستگاه سه قطری (۴۲)، به مقادیر V_{ij}^{n+1} مطابق با فرمول (۴۳) به هنگام می شوند، و سپس مقادیر ψ_{ik} در سطح زمانی $n+1$ اصلاح می شوند.

الگوریتم توماس یک نوع ساده ای از روش حذفی گاوسی است که می توان با استفاده از آن دستگاه معادلات سه قطری را حل کرد. بنابراین، در نتایج عددی از الگوریتم توماس برای حل دستگاه معادلات سه قطری استفاده شده است. سرانجام، این ۶ مرحله بایستی برای $n = 1, \dots, N_t$ تکرار شوند.

۴- نتایج پژوهش

در این بخش، قیمت های اختیارات فروش آمریکایی تحت مدل CIR بر اساس طرح تجزیه ارائه شده در بخش ۳-۴ به دست می آوریم. مقادیر پارامتر همانند کیم (۲۰۰۲) استفاده شده است. این پارامترها عبارتند از:

$$\sigma_1 = 0.2438, \lambda = 1.2188, \bar{r} = 0.0183, \sigma_2 = 0.0289, \rho = 0.00789, K = 10.$$

در اینجا، دامنه محاسباتی $[x_{\min}, x_{\max}] \times [0, r_{\max}] \times [0, T]$ به صورت $x_{\min} = -3$ ، $x_{\max} = 3$ ، $r_{\max} = 1$ و $T = 1$ در نظر گرفته شده است. $(S_{\min} = 0.0498)$ ، $(S_{\max} = 20.0855)$ ، قیمت های دقیق اختیار را بر اساس طرح تجزیه ارائه شده در بخش ۳-۴ تقریب زده ایم. برای ارزیابی جواب های به دست آمده، نتایج عددی حاصله را با نتایج شبیه سازی مونت کارلو مقایسه کرده ایم. قیمت های اختیار فروش آمریکایی با استفاده از شبیه سازی بر اساس روش کم ترین توان های دوم مونت کارلو (LSM) ارائه شده توسط لانگ استاف و شوارتز (۲۰۰۱) با ۱۰۰,۰۰۰

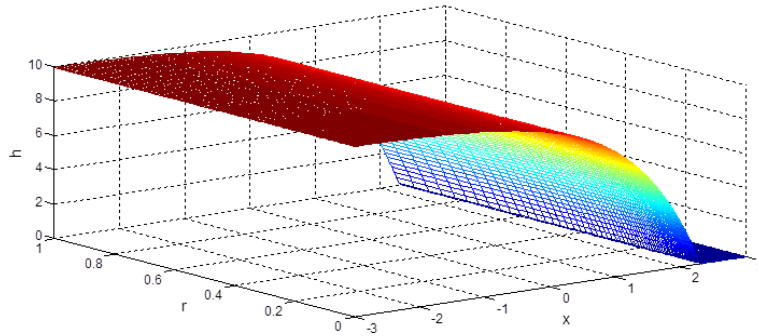
مسیر نمونه‌ای و ۶۰۰۰ مرحله‌ی زمانی محاسبه شده‌اند. برای شبیه‌سازی فرایندهای قیمت‌دارایی پایه و نرخ بهره از روش گسسته‌سازی اویلر با طرح تمام برش (لرد و همکاران، ۲۰۱۰) استفاده کرده‌ایم.

جدول ۱- مقادیر اختیار فروش آمریکایی، $V(x, r, T)$ ، مقایسه شده با مقادیر مونت کارلو به ازای مقادیر متمایزی از r ثابت.

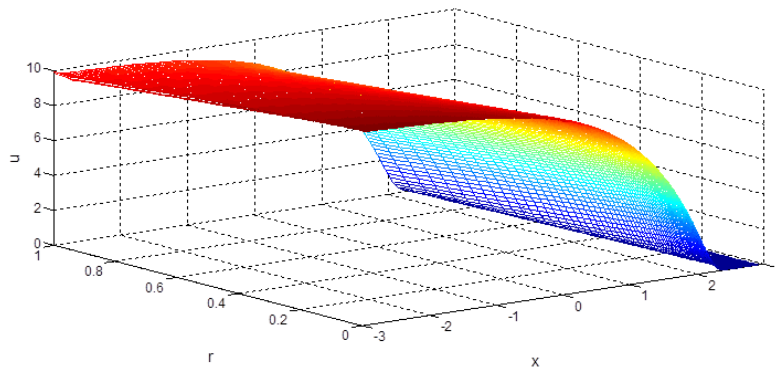
x					شبکه (N_x, N_r, N_t)	r
۲/۴۸۴۹۱ (S=۱۲)	۲/۳۹۷۹۰ (S=۱۱)	۲/۳۰۲۵۹ (S=۱۰)	۲/۱۹۷۲۲ (S=۹)	۲/۰۷۹۴۴ (S=۸)		
۰/۲۶۶۹	۰/۴۱۸۹	۰/۶۱۶۲	۱/۳۷۵۶	۲/۲۰۳۳	(۵۰، ۲۵، ۲۰۰)	۰/۰۶۲۵
۰/۲۶۶۵	۰/۴۱۸۸	۰/۶۱۵۹	۱/۳۷۵۵	۲/۲۰۳۳	(۱۰۰، ۵۰، ۱۶۰۰)	
۰/۲۶۶۰	۰/۴۱۶۹	۰/۶۱۰۷	۱/۳۷۳۵	۲/۲۰۳۵	(۲۰۰، ۱۰۰، ۶۰۰۰)	
۰/۲۶۴۹	۰/۴۰۶۹	۰/۶۰۷۷	۱/۳۶۸۸	۲/۲۰۷۳	مونت-کارلو	
۰/۲۶۸۳	۰/۴۱۹۶	۰/۶۰۶۲	۱/۳۶۶۹	۲/۱۹۸۸	(۵۰، ۲۵، ۲۰۰)	۰/۰۹۰۴
۰/۲۶۷۲	۰/۴۱۸۸	۰/۶۰۵۹	۱/۳۶۶۶	۲/۱۹۸۵	(۱۰۰، ۵۰، ۱۶۰۰)	
۰/۲۶۳۲	۰/۴۱۳۰	۰/۶۰۵۷	۱/۳۶۵۱	۲/۱۹۲۲	(۲۰۰، ۱۰۰، ۶۰۰۰)	
۰/۲۶۱۴	۰/۴۱۱۶	۰/۶۰۷۵	۱/۳۶۱۶	۲/۱۸۶۲	مونت-کارلو	
۰/۲۴۹۳	۰/۳۹۶۰	۰/۵۸۷۲	۱/۳۳۴۹	۲/۱۷۱۸	(۵۰، ۲۵، ۲۰۰)	۰/۱۲۳۶
۰/۲۴۹۸	۰/۳۹۶۲	۰/۵۸۶۹	۱/۳۳۵۱	۲/۱۷۰۵	(۱۰۰، ۵۰، ۱۶۰۰)	
۰/۲۵۱۲	۰/۳۹۶۸	۰/۵۸۵۳	۱/۳۳۶۰	۲/۱۶۰۰	(۲۰۰، ۱۰۰، ۶۰۰۰)	
۰/۲۵۴۲	۰/۳۹۸۷	۰/۵۸۵۸	۱/۳۵۰۳	۲/۱۵۵۰	مونت-کارلو	
۰/۲۳۲۳	۰/۳۷۳۸	۰/۵۵۶۱	۱/۲۹۳۸	۲/۰۷۸۸	(۵۰، ۲۵، ۲۰۰)	۰/۱۶۰۲
۰/۲۳۲۹	۰/۳۷۳۲	۰/۵۵۵۹	۱/۲۹۳۶	۲/۰۷۸۵	(۱۰۰، ۵۰، ۱۶۰۰)	
۰/۲۳۴۶	۰/۳۷۴۱	۰/۵۵۶۶	۱/۲۹۵۰	۲/۱۱۵۸	(۲۰۰، ۱۰۰، ۶۰۰۰)	
۰/۲۳۷۶	۰/۳۷۸۳	۰/۵۵۷۸	۱/۲۹۶۶	۲/۱۳۲۶	مونت-کارلو	

در جدول ۱ نتایج به‌دست آمده به ازای مقادیر متمایزی از قیمت‌دارایی پایه و نرخ بهره ارائه شده است، به طوری که نتایج به‌دست آمده نزدیک به نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشند. شکل ۱ مقدار تابع بازده $V(x, r, 0) = h(x)$ در مقابل (x, r) و قیمت‌های اختیار فروش آمریکایی $V(x, r, T)$ در مقابل (x, r) نشان می‌دهد

در اینجا، دامنه محاسباتی $[x_{min}, x_{max}] \times [0, r_{max}] \times [0, T]$ به صورت $x_{min} = -3$ ، $x_{max} = 3$ ($S_{min} = 0.0498$)، $r_{max} = 1$ و $T = 1$ در نظر گرفته شده است. قیمت‌های دقیق اختیار را بر اساس طرح تجزیه ارائه شده در بخش ۳-۴ تقریب زده‌ایم. برای ارزیابی جواب‌های به دست آمده، نتایج عددی حاصله را با نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو مقایسه کرده‌ایم. قیمت‌های اختیار فروش آمریکایی با استفاده از شبیه‌سازی بر اساس روش کم‌ترین توان‌های دوم مونت کارلو (LSM) ارائه شده توسط لانگ استاف و شوارتز (۲۰۰۱) با ۱۰۰,۰۰۰ مسیر نمونه‌ای و ۶۰۰۰ مرحله‌ی زمانی محاسبه شده‌اند. برای شبیه‌سازی فرایندهای قیمت دارایی پایه و نرخ بهره از روش گسسته‌سازی اویلر با طرح تمام برش (لرد و همکاران، ۲۰۱۰) استفاده کرده‌ایم.



شکل ۱- (a) تابع بازده $V(x, r, 0) = h(x)$ در مقابل (x, r)



شکل ۱- (b) قیمت‌های اختیار $V(x, r, T)$ در مقابل (x, r)

۵- نتیجه‌گیری و بحث

تمرکز اصلی این مقاله مدل‌سازی قیمت اختیار فروش آمریکایی تحت مدل نرخ بهره تصادفی، و سپس حل آن بر اساس روش تجزیه مولفه‌ای بود. برای نیل به این هدف، ابتدا مدل دارایی پایه تحت نرخ بهره تصادفی مدل‌بندی کردیم. سپس، با بستن یک اختیار آمریکایی روی مدل دارایی پایه مذکور، عملگر دیفرانسیل جزئی را به یک LCP با لحاظ کردن شرایط مرزی و اولیه توسعه دادیم، که جوابی از آن قیمت اختیار آمریکایی را تعیین می‌کرد. در ادامه، برای حل این LCP روش تجزیه مولفه‌ای دو سیکل را پیشنهاد کردیم. در این روش، LCP دو بعدی به شش LCP یک بعدی در شش مرحله زمانی کسری تجزیه می‌شد، و هر یک از این LCP ها خود در دو سطح زمانی حل می‌شدند. در نهایت، نتایج عددی حاصله نشان دادند که قیمت‌های محاسبه شده نزدیک به نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو می‌باشند. در زیر پیشنهادهای برای پژوهشگران آینده در این زمینه ارائه شده است.

(۱) مدل دو بعدی بلک-شولز تحت نرخ بهره تصادفی CIR دارای پارامترهای بیشتری نسبت به مدل بلک-شولز است. در عمل بایستی این پارامترها را برآورد کرد. می‌توان از روش برآورد مسئله معکوس پارامترهای مدل را برآورد کرد که تحقیقاتی در این زمینه مسئله معکوس به خوبی توسط نیسی و سلمانی (۲۰۱۳) انجام شده است.

(۲) طرح‌های تجزیه جدید ارائه شده در این تحقیق را می‌توان برای مدل‌های پیچیده‌تر، مانند مدل‌های دارایی پایه تصادفی تحت دینامیک‌های رژیم سوئیچینگ مدل‌بندی شوند، یا جمله پرش را در دینامیک‌های دارایی پایه مشمول کرد، پیاده‌سازی کنیم.

(۳) در این مقاله، یکی از محدودیت‌های مدل بلک-شولز، نرخ بهره ثابت، را نقص کردیم، تا به مدلی انعطاف پذیر و نزدیک به اقتصاد ایران برسیم. لذا مدل‌ها و روش‌های ارائه شده در این تحقیق را می‌توان برای کنترل ریسک در بانک‌ها، بازارهای سهام، اوراق قرضه، ارز و قیمت آتی نفت در بازارهای ایران استفاده کرد.

فهرست منابع

- * Amin, K.I. & Bodurtha, J.N. (1995). Discrete-Time Valuation of American Options with Stochastic Interest Rates. *The Review of Financial Studies*. 8 (1), 193-234.
- * Bakshi, G., Cao, C. & Chen, Z. (2000). Pricing and hedging long-term options. *Journal of Econometrics*. 94, 277-319.
- * Benth, F. E. (2004). *Option theory with stochastic analysis - An introduction to mathematical finance*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- * Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.* 81, 637-654.
- * Brigo, D. and Mercurio, F. (2001). *Interest rate models -theory and practice with smile, inflation and credit*. Springer Verlag.
- * Chang, C. C. (2001). Efficient procedures for the valuation and hedging of American currency options with stochastic interest rates. *Journal of Multinational Financial Management*. 11(3), 241-268.
- * Chang, C. C., Tsay, M. H. & Lin, J. B. (2017). A generalized Brennan–Rubinstein approach for valuing options with stochastic interest rates. *The Quarterly Review of Economics and Finance*.
- * <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1062976917301710>
- * Chung, S. (1997). American Option Valuation under Stochastic Interest Rates. Paper presented at the 24th EFA Meeting, Vienna.
- * Cox, J. C., Ingersoll, J. E. & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*. 53, 385-407.
- * Deng, G. (2015). Pricing American put option on zero-coupon bond in a jump-extended CIR model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 22 (1), 186-196.
- * Falcó, A., Navarro, L1. & Vázquez, C. (2017). A direct LU solver for pricing American bond options under Hull–White model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 309, 442-455.
- * Haug, E. G. (1997). *The complete guide to option pricing formulas*. New York: McGrawHill.
- * Ho, T.S.Y. & Lee, S.-B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *Journal of Finance*. 41, 1011-1029.
- * Ho, T.S., Stapleton, R. C. & Subrahmanyam, M. G. (1997). The Valuation of American Options with Stochastic Interest Rates: A Generalization of the Geske-Johnson Technique. *Journal of Finance*. 52, 827-840.
- * Hull, J. & White, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. *Review of Financial Studies*. 3(4), 573-592.
- * James, J. and Webber, N. (2001). *Interest rate modelling*. John Wiley and Sons Ltd, English.
- * Jiang, A. (2016). American Spread Option Pricing with Stochastic Interest Rate. All Theses and Dissertations. Paper 5987. <https://scholarsarchive.byu.edu/etd/5987>.

- * Kim, Y.J. (2002). Option Pricing under Stochastic Interest Rates: An Empirical Investigation. *Asia-Pacific Financial Markets*. 9(1), 23–44.
- * Kluge, T. (2002). Pricing derivatives in stochastic volatility models using the finite difference method. Diploma Thesis, Chemnitz University of Technology, Chemnitz, Germany.
- * Kwok, Y. K. (2008). *Mathematical models of financial derivatives*. Springer, Berlin.
- * Lindset, S. & Lund, A. C. (2007). A Monte Carlo approach for the American put under stochastic interest rates. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 31(4), 1081-1105.
- * Longstaff, F. & Schwartz, E. (2001). Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*. 14, 113–147.
- * Lord, R., Koekkoek, R. & van Dijk, D. (2010). A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*. 10, 177–194.
- * Menkveld, A.J. & Vorst, T. (2000). A Pricing Model for American Options with Gaussian Interest Rates. *Annals of Operations Research*. 100(1), 211–226.
- * Neisy, A. and Salmani, K. (2013). An inverse finance problem for estimation of the volatility. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 53(1), 63-77.
- * Nunes, J.P.V. (2011). American options and callable bonds under stochastic interest rates and endogenous bankruptcy. *Rev Deriv Res*. 14(3), 283–332.
- * Rouah, F. D. (2013). *The Heston model and its extensions in matlab and C#*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
- * Safaei, M., Neisy, A. & Nematollahi, N. (2017). New Splitting Scheme for Pricing American Options under the Heston Model. *Comput Econ*. <https://doi.org/10.1007/s10614-017-9686-4>
- * Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*. 5(2), 177-188.
- * Zeytun, S. and Gupta, A. (2007). A comparative study of the Vasicek and the CIR model of the short rate. *Berichte des Fraunhofer ITWM: Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik, ITWM*.

یادداشت‌ها

- ¹ Cox-Ingersoll-Ross
- ² Linear complementarity problem
- ³ Two-Cycle Componentwise Splitting Method
- ⁴ Chicago Board Options Exchange
- ⁵ Vasicek
- ⁶ Ho-lee
- ⁷ Hull-White
- ⁸ Crank-Nicolson
- ⁹ Longstaff and Schwartz